**КЛАССИЧЕСКАЯ
УЧЕБНАЯ ЛИТЕРАТУРА
ПО ФИЗИКЕ**

К ЧИТАТЕЛЯМ СЕРИИ «КЛАССИЧЕСКАЯ УЧЕБНАЯ ЛИТЕРАТУРА ПО ФИЗИКЕ»

Существует устойчивое мнение о том, что качество учебников и учебных пособий по физике, изданных в прежние годы, выше, чем сейчас. С точки зрения педагогического мастерства их авторов, уважения к предмету и к студентам, общей высокой культуры, это, несомненно, правильно. И хотя курс общей физики для вузов сейчас заметно отличается от того, каким он был в начале и даже в середине XX века, многие учебные издания по физике того времени еще далеко не исчерпали заложенный в них методический потенциал.

В классических учебниках и учебных пособиях обычно очень детально анализируется понятийный аппарат физики, границы применимости теоретических моделей, внутренняя логика и единство физической картины мира. Наконец, эту литературу просто интересно читать, чувствуя, как опытный педагог мастерски раскрывает перед читателем красоту мира физики.

Учитывая, что многие из этих изданий сейчас являются библиографической редкостью, и понимая важность формирования перспективных планов издания и переработки существующих учебников и учебных пособий, Научно-методический совет (НМС) по физике Министерства образования и науки Российской Федерации и ООО Издательство «Лань» приняли решение о выпуске серии «Классическая учебная литература по физике», в которую войдут лучшие учебные издания по физике для высших учебных заведений, по которым изучали физику многие поколения наших и зарубежных студентов. Эти книги неизменно присутствуют в списках основной и дополнительной литературы в примерных программах по физике для большинства направлений и специальностей, по которым ведется подготовка бакалавров, магистров, инженерных кадров в нашей стране. Можно с уверенностью сказать, что высокий авторитет российского физического образования во многом опирается на первоклассную базу учебной литературы по этой дисциплине.

НМС по физике планирует не только формировать список серии, но и осуществлять необходимую редакционно-корректорскую правку, вносить уточняющие примечания и дополнения в текст того или иного издания с целью приведения его в соответствие с существующими государственными образовательными стандартами, с современным уровнем научно-методической терминологии и содержательной базы дисциплины, включая технический уровень физического эксперимента и теоретико-математический уровень дедуктивных выводов.

Все пожелания и замечания по учебным изданиям серии «Классическая учебная литература по физике» будут с благодарностью приняты и рассмотрены в НМС по физике и в Издательстве «Лань».

Научно-методический совет по физике
Министерства образования и науки РФ

I. V. SAVELYEV

A COURSE IN GENERAL PHYSICS

VOL. 1

•

MECHANICS

•



САНКТ-ПЕТЕРБУРГ • МОСКВА • КРАСНОДАР
2021

И. В. САВЕЛЬЕВ

КУРС ОБЩЕЙ ФИЗИКИ

ТОМ 1

•

МЕХАНИКА

•

УЧЕБНОЕ ПОСОБИЕ

Издание шестое, стереотипное



САНКТ-ПЕТЕРБУРГ • МОСКВА • КРАСНОДАР
2021

УДК 53
ББК 22.3я73

С 12 **Савельев И. В.** Курс общей физики : учебное пособие для вуза : в 5 томах / И. В. Савельев. — 6-е изд., стер. — Санкт-Петербург : Лань, 2021. — Т. 1 : Механика. — 340 с. : ил. — Текст : непосредственный.

ISBN 978-5-8114-1206-8 (общий)
ISBN 978-5-8114-6938-3 (том 1)

Пятитомный курс общей физики, созданный И. В. Савельевым на базе лекций, которые он читал в Московском инженерно-физическом институте, знакомит студентов с основными идеями и методами физики. Первый том содержит изложение материала по механике (кинематика, динамика, законы сохранения, гравитация, колебательное движение, гидродинамика).

Учебное пособие предназначено для студентов вузов, обучающихся по техническим направлениям и специальностям.

УДК 53
ББК 22.3я73

ЛР № 065466 от 21.10.97
Гигиенический сертификат 78.01.10.953.П.1028
от 14.04.2016 г., выдан ЦГСЭН в СПб

Издательство «ЛАНЬ»
lan@lanbook.ru; www.lanbook.com
196105, Санкт-Петербург, пр. Ю. Гагарина, д. 1, лит. А.
Тел./факс: (812) 336-25-09, 412-92-72.
Бесплатный звонок по России: 8-800-700-40-71

Подписано в печать 28.10.20.
Бумага офсетная. Гарнитура Литературная. Формат 84×108 $^{1}/_{32}$.
Печать офсетная. Усл. п. л. 18,48. Тираж 50 экз.

Заказ № 1398-20.

Отпечатано в полном соответствии
с качеством предоставленного оригинал-макета
в АО «Т8 Издательские Технологии».
109316, г. Москва, Волгоградский пр., д. 42, к. 5.

Обложка
Л. А. АРНДТ

Оглавление

Предисловие

Над предлагаемым вниманию читателей «Курсом общей физики» автор работал в течение 35 лет. Первый вариант курса подвергался частичной переработке почти при каждом переиздании. Второй, кардинально переработанный вариант курса, вышедший первым изданием в 1977–1979 гг., по своему уровню и подходу к изложению многих вопросов настолько отличается от прежнего трехтомника, что его с полным основанием можно рассматривать как курс, написанный заново.

Четвертое, переработанное издание «Курса общей физики», в отличие от предыдущих, выпускается в пяти книгах. Изменена последовательность расположения разделов курса: за книгой 1 «Механика» следует книга 2 «Электричество и магнетизм», затем — книга 3 «Молекулярная физика и термодинамика», книга 4 «Волны. Оптика», книга 5 «Квантовая оптика. Атомная физика. Физика твердого тела. Физика атомного ядра и элементарных частиц».

При написании курса мы стремились представить физику не как «зубрильную» науку, не как некоторый объем информации, который нужно усвоить, а как логичную и красивую науку. В какой степени нам это удалось — судить читателю.

Хорошо сознавая, что «пухлое» руководство самим своим видом действует на студента удручающе, мы стремились по возможности ограничить объем курса. Это достигалось путем тщательного отбора материала, который, по нашему мнению, следовало включить в курс. Кроме того, не в ущерб ясности изложения, мы старались быть краткими.

Несмотря на стремление к сокращению объема, мы сочли необходимым включить в курс ряд математических параграфов. Это сделано для того, чтобы придать соответствующим понятиям и соотношениям «физическую окраску». Кроме того, математические «включения» позволяют при изложении физики двигаться дальше даже в том случае, если (как это часто бывает) в курсе математики соответствующий материал еще не был рассмотрен.

В овладении физикой огромную роль играет самостоятельное решение задач. Соответствующие задачи можно найти в «Сборнике вопросов и задач по общей физике» И.В. Савельева (5-е изд. — СПб.: Лань, 2007), составленном применительно к настоящему курсу.

Содержание данной книги «Курса общей физики» составляет изложение физических основ механики. При подготовке книги к четвертому изданию добавлен § 7.5 «Понятие об общей теории относительности», без которого современный курс физики был бы незавершенным. Это повлекло за собой изменение последовательности некоторых глав — главу «Гравитация» (в предыдущих изданиях имевшую название «Закон всемирного тяготения») пришлось поставить после главы «Релятивистская механика» (иначе общая теория относительности предшествовала бы частной теории относительности). Добавлен также § 6.10 «Границы применимости ньютоновской механики». Существенным изменениям и дополнениям подверглись другие параграфы.

Следует помнить, что физика требует от учащегося обдумывания, размышлений. В усвоении материала основную роль должна играть память логическая, а не формальная. Запоминание должно достигаться через глубокое понимание. Над учебником нужно работать, обязательно проделывая все выкладки, не ограничиваясь только чтением книги.

Настоящий курс предназначен в первую очередь для втузов с расширенной программой по физике. Однако изложение построено так, что, опустив отдельные места, этот курс можно использовать в качестве учебного пособия для втузов с обычной программой.

В «Методических рекомендациях», помещенных перед основным текстом, наряду с другим материалом приведен ориентировочный перечень сокращений в тексте, которые можно сделать в случае недостатка времени для изучения курса в полном объеме.

Методические рекомендации

В настоящих рекомендациях содержатся указания на те стороны в существе некоторых вопросов, на которые обычно не обращается должного внимания. Кроме того, приводится ориентировочный перечень параграфов либо их частей, рассмотрение которых не обязательно в случае нехватки времени на изучение курса в полном объеме. Этот перечень отражает личную точку зрения автора и носит лишь рекомендательный характер.

1. В усвоении материала основную роль должна играть память логическая, а не формальная. Запоминание должно достигаться через глубокое понимание. Работать над учебником нужно «с карандашом в руках», обязательно проделывая все выкладки, не ограничиваясь только чтением книги. Материал можно считать усвоенным лишь в том случае, если удается спустя несколько часов (а еще лучше на следующий день) воспроизвести выкладки, не заглядывая в книгу или конспект.

2. Многие физические величины являются векторными. Поэтому хорошее усвоение содержащихся в § 1.2 сведений о векторах является необходимой предпосылкой успешной работы над книгой.

Следует обратить внимание на нетождественность выражений $|\Delta \mathbf{a}|$ и $\Delta a = \Delta|\mathbf{a}|$ (или $|d\mathbf{a}|$ и $da = d|\mathbf{a}|$). Иногда встречается смешение этих двух выражений.

3. Понятие среднего играет в физике важную роль. Поэтому нужно добиться хорошего усвоения формул (1.76)–(1.78). Следует помнить, что средние бывают разные: можно говорить о среднем по времени, среднем по отрезку линии (например, по участку траектории), по поверхности, по объему среднем по частицам и т. п.

Полезно помнить, что среднее по периоду от квадрата синуса или косинуса равно 1/2. Это избавит в ряде случаев от необходимости вычислять соответствующие интегралы.

4. Вместо неоднозначного термина «изменение» нужно пользоваться точными терминами «приращение» и «убыль» (см. подстрочное примечание на с. 87). Часто встречающееся предубеждение против этих терминов обусловлено тем обстоятельством, что термин «приращение» отождествляется с увеличением, возрастанием величины, а термин «убыль» отождествляется с уменьшением, убыванием величины. Эти отождествления неправомерны, их надо отбросить и исходить из определений:

$$\text{приращение} = a_{\text{кон}} - a_{\text{нач}} = \Delta a \quad (\text{или } da),$$
$$\text{убыль} = a_{\text{нач}} - a_{\text{кон}} = -\Delta a \quad (\text{или } -da).$$

Из определений вытекает, что и приращение, и убыль являются алгебраическими величинами, т. е. могут быть не только поло-

жительными, но и отрицательными. В случае отрицательного приращения данная величина не возрастает, а уменьшается; в случае отрицательной убыли данная величина не уменьшается, а возрастает. Чтобы показать недостаточность термина «изменение», сопоставим две формулы (см. (3.11), (3 26))

$$A_{12} = T_2 - T_1 = \Delta T, \quad A_{12} = U_1 - U_2 = -\Delta U$$

В первую формулу входит приращение кинетической энергии, во вторую — убыль потенциальной энергии. Если пользоваться в обоих случаях термином «изменение», характер изменения остается неопределенным.

5. В § 2.9 «Упругие силы» можно ограничиться изучением только первых абзацев, в которых идет речь о законе Гука для пружины. Остальную часть параграфа, начиная с абзаца, в котором приводится формула (2.23), можно опустить. Соответственно в § 3.3 «Работа» можно не рассматривать формулу (3.14), а в § 3.8 «Энергия упругой деформации» можно не рассматривать формулы (3.79)-(3.82).

6. Параграфы § 3.13 «Движение в центральном поле сил» и § 3.14 «Задача двух тел» можно опустить.

7. В § 4.3 «Силы Кориолиса» можно ограничиться выводом формулы (4.12) для случая движения тела по окружности и высказать без доказательства утверждение о том, что эта формула справедлива и в любом случае. Часть параграфа, начинающегося с абзаца, в котором находится формула (4.13), и заканчивающуюся абзацем, в котором дана формула (4.25), можно исключить.

8. Параграф 4.4 «Законы сохранения в неинерциальных системах отсчета» можно опустить.

9. Параграф 5.5 «Понятие о тензоре инерции» можно исключить, равно как и вторую часть § 5.6, в которой выводится выражение для кинетической энергии через тензор инерции. Однако следует обратить внимание учащихся на то, что формула (5.45) справедлива лишь в некоторых особых случаях (см. последний абзац § 5.6).

10. Параграф 5.9 «Гироскопы» можно исключить.

11. В § 6.2 преобразования Лоренца можно дать без вывода. Целесообразно запомнить эти преобразования в форме (6.18).

12. В § 6.6 вывод формулы (6.53) можно опустить.

13. В § 7.2 «Гравитационное поле» можно опустить вторую часть, начинающуюся с абзаца, следующего за формулой (7.11).

14. В § 7.4 можно опустить описание опыта Этвеша.

15. В § 8.11 «Вынужденные колебания» достаточно рассмотреть только один из двух приведенных способов нахождения частного решения: либо способ, использующий комплексную функцию, либо способ, использующий векторную диаграмму.

16. Главу 9 «Гидродинамика» в минимальный вариант программы можно не включать.

Введение

Физика есть наука, изучающая простейшие и вместе с тем наиболее общие закономерности явлений природы, свойства и строение материи и законы ее движения.

В настоящее время известны два вида неживой материи вещество и поле. К первому виду материи — веществу — относятся, например, атомы, молекулы и все построенные из них тела. Второй вид материи образуют электромагнитные, гравитационные и другие поля. Различные виды материи могут превращаться друг в друга. Так, электрон и позитрон (представляющие собой вещество) могут превращаться в фотоны (т. е. в электромагнитное поле). Возможен и обратный процесс.

Физические законы устанавливаются на основе обобщения опытных фактов и выражают объективные закономерности, существующие в природе. Эти законы обычно формулируются в виде количественных соотношений между различными физическими величинами.

Основным методом исследования в физике является опыт, т. е. наблюдение исследуемого явления в точно контролируемых условиях, позволяющих следить за ходом явления и воссоздавать его каждый раз при повторении этих условий. Экспериментально могут быть вызваны явления, которые естественно в природе не наблюдаются.

Для объяснения экспериментальных данных привлекаются гипотезы. Гипотеза — это научное предположение, выдвигаемое для объяснения какого-либо факта или явления и требующее проверки и доказательства для того, чтобы стать научной теорией или законом. Правильность высказанной гипотезы проверяется посредством постановки соответствующих опытов, путем выяснения согласия следствий, вытекающих из гипотезы, с результатами опытов и наблюдений. Успешно прошедшая такую проверку и доказанная гипотеза превращается в научную теорию или закон.

Физическая теория представляет собой систему основных идей, обобщающих опытные данные и отражающих объективные закономерности природы. Физическая теория дает объяснение целой области явлений природы с единой точки зрения.

Раньше других развилась теория классической физики. Начало классической физики было положено Исааком Ньютоном, сформулировавшим основные законы механики. Ньютоновская механика оказалась настолько плодотворной, настолько могущественной, что у многих физиков сложилось представление о том, что любое физическое явление можно объяснить с помощью ньютоновских законов.

Построенное к началу XX столетия здание классической физики казалось завершенным. Однако наиболее проницательные физики понимали, что в здании классической физики есть слабые места. Английский физик Уильям Томсон (он же лорд Кельвин) говорил, например, что на горизонте безоблачного неба классической физики имеются два темных облачка: неудача в создании теории излучения абсолютно черного тела и противоречивое поведение эфира — гипотетической среды, в которой предполагалось распространение световых волн.

Попытки преодолеть затруднения ньютоновской механики привели к неожиданным результатам. Противоречивость опытных фактов, касающихся эфира, побудила Альберта Эйнштейна пересмотреть считавшиеся со времен Ньютона очевидными представления о пространстве и времени. Это привело к созданию в 1905 г. специальной теории относительности которая для тел, движущихся со скоростями, заметными по сравнению со скоростью света, дает уравнения движения, существенно отличающиеся от уравнений ньютоновской механики Таким образом классическая механика разделилась на ньютоновскую (или нерелятивистскую) и релятивистскую механику.

Для решения задачи об излучении абсолютно черного тела Макс Планк ввел в 1900 г. чуждое духу классической физики представление об испускании света отдельными порциями — квантами. Так на пороге XX столетия появилось понятие кванта, приведшее к созданию квантовой механики.

Начало XX столетия характеризуется настойчивыми попытками проникнуть во внутреннее строение атомов. Ключом к выяснению строения атомов послужило изучение атомных спектров. Первый разительный успех в объяснении наблюдаемых спектров принесла теория атома, развитая Нильсом Бором в 1913 г. Однако эта теория носила явные черты непоследовательности. Наряду с подчинением движения электрона в атоме законам классиче-

ской механики она налагала на это движение специальные квантовые ограничения. После первых успехов в объяснении спектра простейшего атома — водорода — обнаружилась неспособность теории Бора объяснить поведение атомов с двумя и бóльшим числом электронов.

Назрела необходимость создания новой, целостной теории атомов. Начало созданию такой теории было положено в 1924 г. смелой гипотезой Луи де Бройля. К тому времени было известно, что свет, будучи волновым процессом, вместе с тем в ряде случаев обнаруживает корпускулярную природу, т. е. ведет себя как поток частиц. Де Бройль высказал мысль, что и частицы вещества, в свою очередь, должны обнаруживать при определенных условиях волновые свойства.

Гипотеза де Бройля вскоре получила экспериментальное подтверждение: было доказано, что с частицами вещества связан некий волновой процесс, который должен быть учтен при рассмотрении механики атома. Результатом этого открытия было создание Эрвином Шредингером и Вернером Гейзенбергом новой физической теории — квантовой (или волновой) механики. Квантовая механика достигла поразительных успехов в объяснении атомных процессов и строения вещества. В тех случаях, когда удалось преодолеть математические трудности, были получены результаты, превосходно согласующиеся с опытом.

Законы квантовой механики составляют фундамент изучения атомного ядра, свойств элементарных частиц, управляемого термоядерного синтеза, квантовой электроники, физики твердого тела, других разделов современной физики. Ряд крупнейших технических достижений XX столетия основан по существу на квантовомеханических законах. Таким образом, квантовая механика стала в значительной мере «инженерной» наукой, знание которой необходимо не только физикам-исследователям, но и инженерам.

Глава 1
Кинематика

1.1. Механическое движение

Движением в широком смысле слова называется всякое изменение вообще. Простейшей формой движения является механическое движение, которое заключается в изменении с течением времени положения тел или их частей относительно друг друга. Перемещения тел мы наблюдаем повседневно в обыденной жизни. Наглядность механических движений была причиной того, что из всех естественных наук механика прежде других получила широкое развитие.

Классическая (неквантовая) механика подразделяется на ньютоновскую (нерелятивистскую) механику и релятивистскую механику. В основе ньютоновской механики лежат законы Ньютона[1]). Эта механика справедлива лишь для макроскопических тел, движущихся со скоростями, малыми по сравнению со скоростью света. Под макроскопическим телом подразумевается тело, образованное очень большим числом атомов; масса такого тела во много раз превосходит массу отдельного атома.

Релятивистской называется механика, учитывающая требования специальной теории относительности (СТО). Она справедлива и при скоростях, сравнимых со скоростью света. Заметим, что согласно СТО скорости тел не могут быть больше скорости света в вакууме.

Движение тел происходит в пространстве и во времени. Ньютон считал пространство и время абсолютными, не зависящими как друг от друга, так и от присутствующих в пространстве тел. Абсолютное пространство определялось Ньютоном как безотносительное к чему-либо внешнему вместилище вещей, остающееся всегда одинаковым и неподвижным. О времени Ньютон писал: «Аб-

---

[1]) Исаак Ньютон (1643–1727) — выдающийся английский ученый, основатель классической физики.

солютное, истинное или математическое время само по себе и в силу своей внутренней природы течет равномерно, безотносительно к чему-либо внешнему».

Теория относительности внесла в представления о пространстве и времени коренные изменения. Согласно СТО пространство и время неразрывно связаны друг с другом, образуя единое четырехмерное пространство-время (об этом подробно рассказано в § 6.1). Из общей теории относительности (ОТО) следует, что присутствие гравитирующих (тяготеющих) масс «искривляет» пространство и оказывает влияние на ход времени.

Однако, несмотря на неверность ньютоновых представлений о пространстве и времени, основанная на этих представлениях ньютоновская механика оказывается справедливой в применении к телам больших (по сравнению с массой атомов) масс и малых (по сравнению со скоростью света) скоростей.

Из определения механического движения как изменения взаимного расположения тел в пространстве следует, что, приступая к изучению движения какого-либо тела, нужно указать, по отношению к какому телу (или телам) мы рассматриваем движение данного тела. Кроме того, для измерения времени необходимо иметь часы. Роль часов может выполнять любое устройство, совершающее многократно один и тот же процесс.

Совокупность неподвижных относительно друг друга тел, по отношению к которым рассматривается движение, и отсчитывающих время часов образует *системуотсчета*.

Движение одного и того же тела относительно различных систем отсчета может иметь разный характер. Для примера представим себе набирающий скорость поезд. Пусть по коридору одного из вагонов этого поезда идет с постоянной скоростью пассажир. Тогда движение пассажира относительно вагона будет равномерным, а относительно поверхности Земли — ускоренным.

Совокупность тел, выделенная для рассмотрения, называется *механической системой*.

Какие тела следует включить в систему, зависит от характера решаемой задачи. В частном случае система может состоять из одного-единственного тела.

Описать движение тела означает указать для каждого момента времени положение в пространстве и скорость тела. Для того чтобы задать состояние механической сис-

темы, нужно указать положения и скорости всех тел, образующих систему. Типичная задача механики заключается в том, чтобы, зная состояние системы в некоторый начальный момент времени t_0, а также законы, управляющие движением, определить состояния системы во все последующие моменты времени t.

Отметим, что ни одна физическая задача не может быть решена абсолютно точно. Всегда получают приближенное решение. Степень приближения определяется характером задачи, целью, которую хотят достичь. Решая задачу приближенно, пренебрегают некоторыми факторами, которые в данном случае не существенны. Например, часто можно пренебречь размерами тела, движение которого изучается.

Тело, размерами которого в условиях данной задачи можно пренебречь, называется **материальной точкой**[2]).

Вопрос о том, можно ли данное конкретное тело рассматривать как материальную точку или нет, зависит не от размеров этого тела, а от условий задачи. Одно и то же тело в одних случаях может быть сочтено за материальную точку, в других же должно рассматриваться как протяженное тело. Например, исследуя движение Земли вокруг Солнца, можно считать Землю материальной точкой (отношение расстояния от Земли до Солнца к диаметру Земли равно примерно 12 000). Изучая же движение искусственного спутника, Землю надо рассматривать как протяженное тело. В дальнейшем наряду с термином «материальная точка» мы будем для краткости использовать термин «частица», подразумевая при этом не элементарную, а макроскопическую частицу.

Говоря о каком-то теле как о материальной точке, мы абстрагируемся от его размеров. Вторая абстракция, с которой приходится иметь дело в механике, — это абсолютно твердое тело. В природе нет совершенно недеформируемых тел. Всякое тело под действием приложенных к нему сил в большей или меньшей степени деформируется, т. е. изменяет свою форму и размеры. Однако во многих случаях деформациями тел при рассмотрении их движений можно пренебречь. Если это имеет место, то тело назы-

---

[2]) Термин «материальная точка» нам представляется не очень удачным. Более подошел бы термин «точечная масса» (по аналогии с «точечным зарядом» в электричестве и «точечным источником света» в оптике).

вают абсолютно твердым. Таким образом, **абсолютно твердым телом** называется тело, деформациями которого в условиях данной задачи можно пренебречь.

Всякое движение твердого тела можно разложить на два основных вида движения — **поступательное** и **вращательное**.

Поступательное движение — это такое движение, при котором любая прямая, связанная с движущимся телом, остается параллельной самой себе (рис. 1.1).

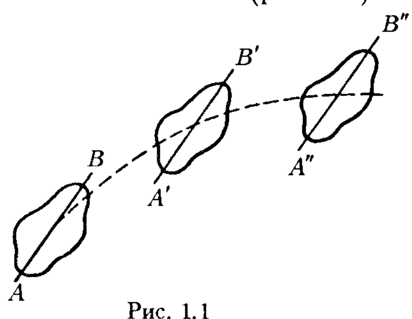


Рис. 1.1

При вращательном движении все точки тела движутся по окружностям, центры которых лежат на одной и той же прямой, называемой **осью вращения** (рис. 1.2*а*). Ось вращения может находиться и вне тела (рис. 1.2*б*).

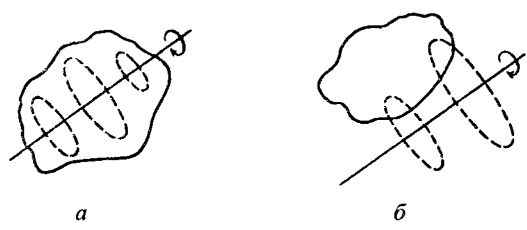


Рис. 1.2

Поскольку, говоря о каком-либо теле как о материальной точке, мы отвлекаемся от его протяженности, понятие вращательного движения вокруг проходящей через него оси к такому телу неприменимо.

Для того чтобы получить возможность описывать движение количественно, приходится связывать с телами, образующими систему отсчета, какую-либо **систему координат**, например декартову. Тогда положение материальной точки можно определить, задав три числа x,

y, z — декартовы координаты этой точки. Систему координат можно реализовать, собрав из одинаковых масштабных стержней или линеек прямоугольную решетку (рис. 1.3). В узлах этой решетки нужно разместить одинаковые синхронизированные друг с другом часы. Положение материальной точки и соответствующий ему момент времени регистрируются по ближайшим к материальной точке масштабам и часам. В зависимости от характера изучаемых объектов механика подразделяется на механику материальной точки, механику твердого тела и механику сплошной среды. Механика сплошной среды изучает движение и равновесие газов, жидкостей и деформируемых тел. Она рассматривает вещество как непрерывную сплошную среду, отвлекаясь от прерывистого молекулярного строения. Одним из разделов механики сплошных сред является гидродинамика (механика жидкостей), которой посвящена гл. 9.

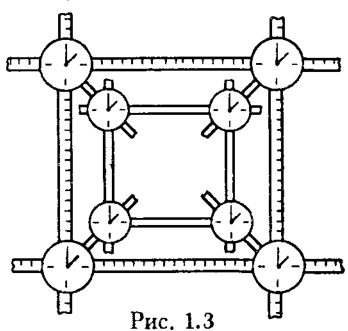


Рис. 1.3

Иметь дело с материальной точкой проще, чем с протяженным телом. Поэтому мы сначала будем изучать механику материальной точки, а потом перейдем к механике твердого тела. Изложение начнем с кинематики, а затем займемся динамикой. Напомним, что кинематика изучает движение тел, не интересуясь причинами, обусловливающими это движение. Динамика изучает движение тел в связи с теми причинами (взаимодействиями между телами), которые обусловливают тот или иной характер движения.

1.2. Некоторые сведения о векторах

Определение вектора. Векторами называются величины, характеризующиеся числовым значением и направлением и, кроме того, складывающиеся по правилу параллелограмма[3]). Последнее требование является весьма

[3]) Согласно более строгому определению вектором называется совокупность трех величин, преобразующихся при поворотах координатных осей по определенному закону (см. Приложение).

существенным. Можно указать такие величины, которые характеризуются числовым значением и направлением, однако складываются иначе, чем векторы. В качестве примера приведем поворот тела вокруг некоторой оси на конечный угол φ. Такой поворот можно изобразить в виде отрезка длины φ, направленного по оси, вокруг которой осуществляется поворот, в сторону, связанную с направлением вращения правилом правого винта. На рис. 1.4 в верхнем ряду показаны два последовательных поворота шара на углы $\pi/2$, изображаемые отрезками

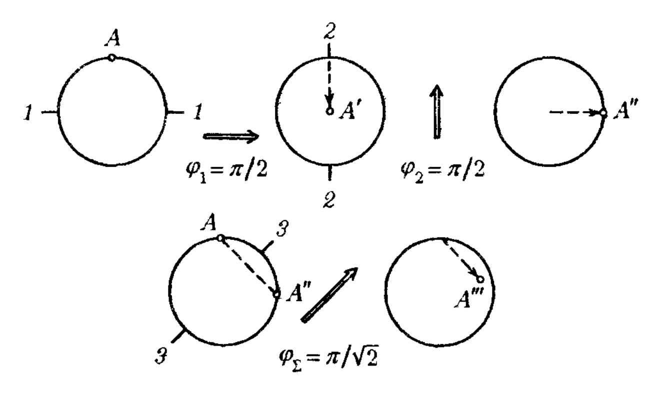


Рис. 1.4

φ_1 и φ_2. Первый поворот, совершаемый вокруг оси *1—1*, переводит точку A шара в положение A', второй, совершаемый вокруг оси *2—2*, — в положение A''. Такого же результата (т. е. перевода точки A в положение A'') можно достичь, повернув шар вокруг оси *3—3* на угол π. Следовательно, такой поворот следует рассматривать как сумму поворотов φ_1 и φ_2. Однако его нельзя получить из отрезков φ_1 и φ_2, сложив их по правилу параллелограмма. Такое сложение дает отрезок длины $\pi/\sqrt{2}$ вместо требуемой длины π. Поворот на угол $\pi/\sqrt{2}$ переводит точку A в точку A'''. Отсюда вытекает, что изображаемые направленными отрезками повороты на конечные углы не обладают свойствами векторов.

Числовое значение вектора называется его модулем. Образно говоря, модуль — это длина вектора. Модуль вектора — скаляр, причем всегда положительный.

На чертежах векторы изображаются в виде прямолинейных отрезков со стрелкой на конце. Длина отрезка определяет в установленном масштабе модуль вектора, а стрелка указывает его направление.

Векторы принято обозначать буквами жирного шрифта, например **a**, **b**, **v**, **F** и т. п. Такая же буква обычного (светлого) шрифта используется для обозначения модуля вектора; например, a есть модуль вектора **a**[4]. Иногда для обозначения модуля приходится пользоваться символом вектора, заключенным между двумя вертикальными черточками: $|\mathbf{a}|$ = модуль вектора **a**. Таким же способом обозначается и модуль суммы векторов $\mathbf{a}_1$ и $\mathbf{a}_2$:

$$|\mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2| = \text{модуль вектора } (\mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2). \tag{1.1}$$

В этом случае символ $a_1 + a_2$ означает сумму модулей складываемых векторов, которая, вообще говоря, не равна модулю суммы векторов (равенство имеет место лишь в том случае, когда складываемые векторы имеют одинаковое направление).

Векторы, направленные вдоль параллельных прямых (в одну и ту же или в противоположные стороны), называются коллинеарными. Векторы, которые лежат в параллельных плоскостях, называются компланарными. Посредством параллельного переноса коллинеарные векторы могут быть расположены вдоль одной и той же прямой, а компланарные векторы могут быть сведены в одну плоскость. Коллинеарные векторы, совпадающие по модулю и имеющие одинаковое направление, считаются равными друг другу[5].

Сложение и вычитание векторов. Практически сложение векторов удобнее производить без построения параллелограмма. Как видно из рис. 1.5, такой же резуль-

---

[4]) При письме векторы обозначаются буквами со стрелкой над ними (например, $\vec{a}$). В этом случае та же буква без стрелки означает модуль вектора.

[5]) Имеются в виду так называемые свободные векторы, т. е. векторы, которые могут быть отложены из любой точки пространства. Рассматриваются также скользящие векторы, начало которых может быть помещено в любую точку прямой, вдоль которой направлен вектор, и связанные векторы, т. е. векторы, приложенные к определенной точке. Последние два вида векторов могут быть выражены через свободные векторы, по этой причине в основу векторного исчисления положено понятие свободного вектора, называемого обычно просто вектором.

тат достигается, если начало второго вектора совместить с концом первого, а затем провести из начала первого в конец второго результирующий вектор. Особенно целесо-

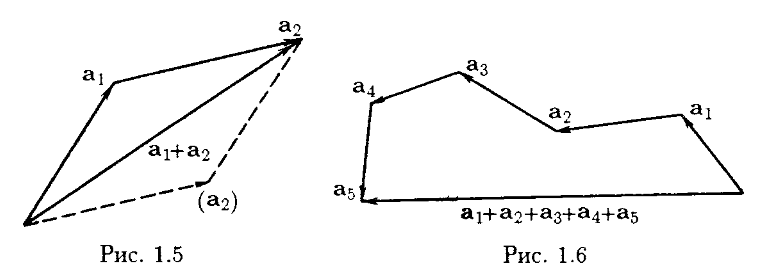


Рис. 1.5 Рис. 1.6

образен такой прием в том случае, если приходится складывать большее двух векторов (рис. 1.6).

Разностью двух векторов $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ называется такой вектор $\mathbf{c}$, который в сумме с вектором $\mathbf{b}$ дает вектор $\mathbf{a}$ (рис. 1.7; об изображенном штриховой линией векторе $-\mathbf{b}$ речь идет ниже). Модуль разности двух векторов, как и модуль суммы (см. (1.1)), можно записать с помощью вертикальных черточек:

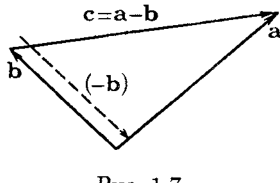


Рис. 1.7

$$|\mathbf{a}_1-\mathbf{a}_2| = \text{модуль вектора } (\mathbf{a}_1-\mathbf{a}_2), \tag{1.2}$$

поскольку символ $a_1 - a_2$ означает разность модулей векторов $\mathbf{a}_1$ и $\mathbf{a}_2$, которая, вообще говоря, не равна модулю разности.

Умножение вектора на скаляр. В результате умножения вектора $\mathbf{a}$ на скаляр α получается новый вектор $\mathbf{b} = \alpha\mathbf{a}$, модуль которого в $|\alpha|$ раз больше модуля вектора $\mathbf{a}$ ($b = |\alpha|a$). Направление же вектора $\mathbf{b}$ либо совпадает с направлением вектора $\mathbf{a}$ (если $\alpha > 0$), либо противоположно ему (если $\alpha < 0$). Из сказанного вытекает, что умножение на -1 изменяет направление вектора на обратное. Следовательно, векторы $\mathbf{a}$ и $-\mathbf{a}$ имеют одинаковые модули, но противоположны по направлению. С помощью рис. 1.7 легко убедиться в том, что вычитание вектора $\mathbf{b}$ из вектора $\mathbf{a}$ равнозначно прибавлению к вектору $\mathbf{a}$ вектора $-\mathbf{b}$.

Соотношение $\mathbf{a} = -\mathbf{b}$ или $\mathbf{b} = -\mathbf{a}$ отнюдь не означает, что один из векторов положительный, а другой отрица-

тельный. Векторы нельзя сравнивать друг с другом, не бывает положительных и отрицательных векторов, невозможны неравенства вида $\mathbf{a} > \mathbf{b}$. Соотношение $\mathbf{a} = -\mathbf{b}$ означает лишь, что векторы $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ имеют одинаковые модули, а направления этих векторов противоположны.

Из определения операции умножения вектора на скаляр следует, что всякий вектор $\mathbf{a}$ можно представить в виде

$$\mathbf{a} = a\mathbf{e}_a, \tag{1.3}$$

где a — модуль вектора $\mathbf{a}$, $\mathbf{e}_a$ — вектор с модулем, равным единице, имеющий такое же направление, как и $\mathbf{a}$ (рис. 1.8). Вектор $\mathbf{e}_a$ называется *единичным вектором* или *ортом* вектора $\mathbf{a}$. Орт можно представить в виде

Рис. 1.8

$$\mathbf{e}_a = \frac{\mathbf{a}}{a}, \tag{1.4}$$

откуда следует, что орт является безразмерной величиной.

Орты можно сопоставлять не только векторам, но и любым направлениям в пространстве. Например, $\mathbf{e}_x$ есть орт координатной оси x, $\mathbf{e}_n$ — орт нормали к кривой или поверхности, $\mathbf{e}_\tau$ — орт касательной к кривой и т. д.

Линейная зависимость между векторами. Рассмотрим три неколлинеарных вектора $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ и $\mathbf{c}$, которые лежат в одной плоскости. Из рис. 1.9 видно, что любой из них (например, $\mathbf{c}$) можно выразить через два других с помощью соотношения

$$\mathbf{c} = \alpha\mathbf{a} + \beta\mathbf{b}, \tag{1.5}$$

где α и β — некоторые числа (для изображенного на рисунке случая $\alpha > 1$, $-1 < \beta < 0$). Отсюда заключаем, что любой вектор $\mathbf{c}$, лежащий в одной плоскости с неколлинеарными векторами $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$, может быть выражен через эти векторы с помощью линейного соотношения (1.5). При фиксированных векторах $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ всякий третий вектор однозначно определяется двумя величинами α и β.

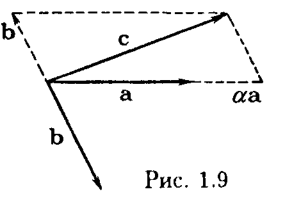


Рис. 1.9

Пусть даны три вектора **a**, **b**, **c**, каждый из которых некомпланарен с остальными двумя[6]). По аналогии с (1.5) легко сообразить, что любой вектор **d** можно представить как линейную комбинацию заданных векторов:

$$\mathbf{d} = \alpha\mathbf{a} + \beta\mathbf{b} + \gamma\mathbf{c}. \qquad (1.6)$$

При фиксированных векторах **a**, **b** и **c** любой вектор **d** однозначно определяется тремя величинами α, β и γ, каждая из которых может быть как положительной, так и отрицательной.

Проекция вектора. Рассмотрим некоторое направление в пространстве, которое мы зададим осью l (рис. 1.10). Пусть вектор **a** образует с осью l угол φ[7]). Величина

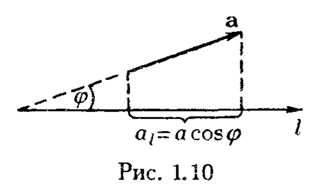


Рис. 1.10

$$a_l = a\cos\varphi \qquad (1.7)$$

(a — модуль вектора) называется проекцией вектора **a** на ось l. Проекция обозначается той же буквой, что и вектор, с добавлением индекса, указывающего направление, на которое спроецирован вектор.

Проекция вектора есть величина алгебраическая. Если вектор образует с данным направлением острый угол, то $\cos\varphi > 0$ и проекция положительна. Если угол φ тупой, то $\cos\varphi < 0$ и проекция отрицательна. Когда вектор перпендикулярен к данной оси, проекция равна нулю.

Проекция вектора имеет простой геометрический смысл. Она равна расстоянию между проекциями на ось начала и конца отрезка, изображающего данный вектор. В случае $\varphi < \pi/2$ это расстояние берется со знаком плюс, в случае $\varphi > \pi/2$ — со знаком минус.

Пусть $\mathbf{a} = \mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2 + \mathbf{a}_3 + \mathbf{a}_4$ (рис. 1.11). Из рисунка видно, что проекция результирующего вектора **a** на некоторое направление равна сумме проекций складываемых

---

[6]) Два вектора всегда компланарны. Это следует из того, что параллельным переносом можно всегда совместить их начала. Тогда они окажутся расположенными в одной плоскости.

[7]) Если прямая, вдоль которой направлен вектор **a**, и ось l не пересекаются, для определения угла φ нужно взять пересекающуюся с осью l прямую, параллельную вектору **a**. Угол между этой прямой и осью l и будет интересующим нас углом φ.

векторов:

$$a_l = a_{1l} + a_{2l} + a_{3l} + a_{4l}. \quad (1.8)$$

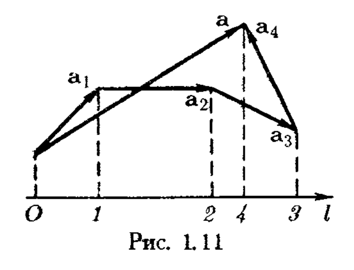


Рис. 1.11

Напомним, что при суммировании проекций изображенных на рис. 1.11 векторов расстояния *0—1*, *1—2* и *2—3* нужно взять со знаком плюс, а расстояние *3—4* — со знаком минус. Формула (1.8) справедлива при любом числе слагаемых.

Выражение вектора через его проекции на координатные оси. Возьмем декартовы оси координат и рассмотрим вектор **a**, лежащий в плоскости, перпендикулярной к оси z (рис. 1.12). Введем орты координатных осей, т. е. единичные векторы $\mathbf{e}_x$, $\mathbf{e}_y$ и $\mathbf{e}_z$ ($\mathbf{e}_z$ на рисунке не показан, он перпендикулярен к плоскости рисунка и направлен «на нас»). Заметим, что эта тройка ортов полностью определяет систему координат и поэтому называется базисом координатной системы.

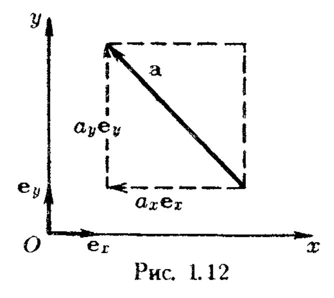


Рис. 1.12

Из рис. 1.12 видно, что вектор **a** можно представить в виде линейной комбинации ортов $\mathbf{e}_x$ и $\mathbf{e}_y$ (см. (1.5)):

$$\mathbf{a} = a_x\mathbf{e}_x + a_y\mathbf{e}_y.$$

Роль коэффициентов α и β играют проекции вектора на оси координат. В рассматриваемом примере проекция a_x отрицательна, поэтому вектор $a_x\mathbf{e}_x$ имеет направление, противоположное направлению орта $\mathbf{e}_x$.

Мы взяли вектор **a**, перпендикулярный к оси z, вследствие чего $a_z = 0$. В общем случае, когда все три проекции вектора отличны от нуля,

$$\mathbf{a} = a_x\mathbf{e}_x + a_y\mathbf{e}_y + a_z\mathbf{e}_z. \quad (1.9)$$

Таким образом, любой вектор можно выразить через его проекции на координатные оси и орты этих осей. В связи с этим проекции на координатные оси называются компонентами вектора.

Величины a_x, a_y, a_z равны (с точностью до знака) сторонам прямоугольного параллелепипеда, большой диагональю которого служит вектор **a** (рис. 1.13). Поэтому имеет место соотношение

$$a^2 = a_x^2 + a_y^2 + a_z^2. \qquad (1.10)$$

Пусть $\mathbf{c} = \mathbf{a} + \mathbf{b}$. Представив каждый из векторов в соответствии с формулой (1.9), получим

$$c_x\mathbf{e}_x + c_y\mathbf{e}_y + c_z\mathbf{e}_z = (a_x + b_x)\mathbf{e}_x + (a_y + b_y)\mathbf{e}_y + (a_z + b_z)\mathbf{e}_z$$

(мы вынесли за скобки общие множители $\mathbf{e}_x$, $\mathbf{e}_y$ и $\mathbf{e}_z$. Равные векторы имеют одинаковые проекции на координатные оси. На этом основании можно написать, что

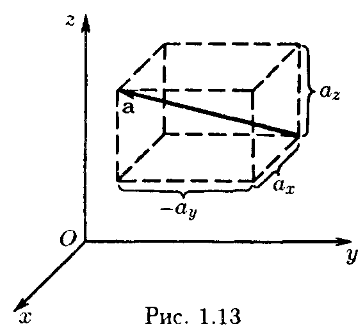


Рис. 1.13

$$c_x = a_x + b_x,$$
$$c_y = a_y + b_y, \qquad (1.11)$$
$$c_z = a_z + b_z$$

(ср. с (1.8)). Формулы (1.11) являются аналитическим выражением правила сложения векторов. Они справедливы при любом числе слагаемых.

Радиус-вектор. Радиусом-вектором **r** некоторой точки называется вектор, проведенный из начала координат в данную точку (рис. 1.14). Его проекции на координатные оси равны декартовым координатам данной точки:

$$r_x = x, \quad r_y = y, \quad r_z = z. \qquad (1.12)$$

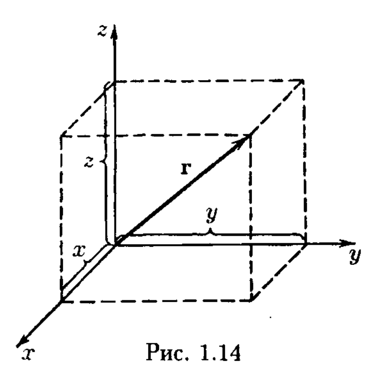


Рис. 1.14

Следовательно, в соответствии с (1.9) радиус-вектор можно представить в виде

$$\mathbf{r} = x\mathbf{e}_x + y\mathbf{e}_y + z\mathbf{e}_z. \qquad (1.13)$$

Согласно (1.10)

$$r^2 = x^2 + y^2 + z^2. \qquad (1.14)$$

Скалярное произведение векторов. Два вектора **a** и **b** можно умножить друг на друга двумя способами; один способ приводит к скалярной величине, другой — к векторной. В соответствии с этим существует два произведения векторов — скалярное и векторное. Отметим, что операции деления вектора на вектор не существует.

Скалярным произведением векторов **a** и **b** называется скаляр, равный произведению модулей этих векторов на косинус угла α между ними:

$$\mathbf{ab} = ab\cos\alpha \qquad (1.15)$$

(рис. 1.15). При записи скалярного произведения символы перемножаемых векторов пишутся рядом без какого-либо знака между ними. Выражение (1.15) есть алгебраическая величина: при остром угле α произведение $\mathbf{ab} > 0$, при α тупом $\mathbf{ab} < 0$.

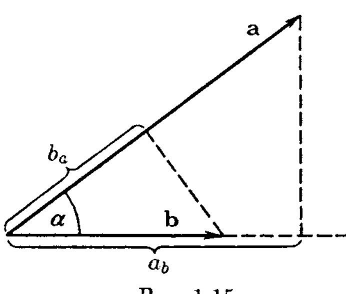


Рис. 1.15

Скалярное произведение взаимно перпендикулярных векторов ($\alpha = \pi/2$) равно нулю.

Заметим, что под квадратом вектора всегда подразумевают скалярное произведение вектора на самого себя:

$$\mathbf{a}^2 = \mathbf{aa} = aa\cos\alpha = a^2. \qquad (1.16)$$

Таким образом, квадрат вектора равен квадрату его модуля. В частности, квадрат любого орта равен единице:

$$\mathbf{e}_x^2 = \mathbf{e}_y^2 = \mathbf{e}_z^2 = 1. \qquad (1.17)$$

Попутно отметим, что вследствие взаимной перпендикулярности ортов скалярные произведения вида $\mathbf{e}_i\mathbf{e}_k$ равны нулю, если $i \neq k$.

Очень удобен символ Кронекера δ_{ik}, который определяется следующим образом:

$$\delta_{ik} = \begin{cases} 1 & \text{при} \quad i = k, \\ 0 & \text{при} \quad i \neq k. \end{cases} \qquad (1.18)$$

С использованием этого символа установленные выше свойства скалярных произведений ортов координатных осей можно выразить одной формулой:

$$\mathbf{e}_i\mathbf{e}_k = \delta_{ik} \quad (i,\, k = x, y, z) \qquad (1.19)$$

(индексы i и k могут принимать независимо друг от друга значения x, y и z).

Из определения (1.15) следует, что скалярное произведение коммутативно, т. е. не зависит от порядка сомножителей:

$$\mathbf{ab} = \mathbf{ba}. \tag{1.20}$$

Выражение (1.15) можно записать несколькими способами:

$$\mathbf{ab} = ab\cos\alpha = (a\cos\alpha)b = a(b\cos\alpha).$$

Из рис. 1.15 видно, что $a\cos\alpha = a_b$, т. е. проекции вектора $\mathbf{a}$ на направление вектора $\mathbf{b}$. Аналогично $b\cos\alpha = b_a$ — проекции вектора $\mathbf{b}$ на направление вектора $\mathbf{a}$. Поэтому можно сказать, что скалярным произведением двух векторов называется скаляр, равный произведению модуля одного из перемножаемых векторов на проекцию второго вектора на направление первого:

$$\mathbf{ab} = a_b b = ab_x. \tag{1.21}$$

Приняв во внимание, что проекция суммы векторов равна сумме проекций складываемых векторов, можно написать

$$\mathbf{a}(\mathbf{b} + \mathbf{c} + \ldots) = a(\mathbf{b} + \mathbf{c} + \ldots)_{\text{пр}\,\mathbf{a}} = a(b_a + c_a + \ldots) =$$
$$= ab_a + ac_a + \ldots = \mathbf{ab} + \mathbf{ac} + \ldots \tag{1.22}$$

Отсюда следует, что скалярное произведение векторов дистрибутивно: произведение вектора $\mathbf{a}$ на сумму нескольких векторов равно сумме произведений вектора $\mathbf{a}$ на каждый из складываемых векторов, взятый в отдельности.

Представив перемножаемые векторы в виде (1.9) и воспользовавшись дистрибутивностью скалярного произведения, получим

$$\mathbf{ab} = (a_x\mathbf{e}_x + a_y\mathbf{e}_y + a_z\mathbf{e}_z)(b_x\mathbf{e}_x + b_y\mathbf{e}_y + b_z\mathbf{e}_z) =$$
$$= a_xb_x\mathbf{e}_x\mathbf{e}_x + a_xb_y\mathbf{e}_x\mathbf{e}_y + a_xb_z\mathbf{e}_x\mathbf{e}_z +$$
$$+ a_yb_x\mathbf{e}_y\mathbf{e}_x + a_yb_y\mathbf{e}_y\mathbf{e}_y + a_yb_z\mathbf{e}_y\mathbf{e}_z +$$
$$+ a_zb_x\mathbf{e}_z\mathbf{e}_x + a_zb_y\mathbf{e}_z\mathbf{e}_y + a_zb_z\mathbf{e}_z\mathbf{e}_z.$$

Теперь учтем (1.19). В итоге получим выражение скалярного произведения через проекции перемножаемых векторов:

$$\mathbf{ab} = a_xb_x + a_yb_y + a_zb_z. \tag{1.23}$$

Заметим, что при поворотах координатных осей проекции векторов на эти оси меняются. Однако величина $ab\cos\alpha$ от выбора осей не зависит. Отсюда следует, что изменения проекций векторов **a** и **b** при поворотах осей носят такой характер, что их комбинация вида (1.23) остается инвариантной (неизменной):

$$a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z = \text{inv}. \tag{1.24}$$

Легко сообразить, что проекцию вектора **a** на направление l (см. (1.7)) можно представить в виде

$$a_l = \mathbf{a}\mathbf{e}_l, \tag{1.25}$$

где $\mathbf{e}_l$ — орт направления l. Аналогично

$$a_x = \mathbf{a}\mathbf{e}_x, \quad a_y = \mathbf{a}\mathbf{e}_y, \quad a_z = \mathbf{a}\mathbf{e}_z. \tag{1.26}$$

Прежде чем двигаться дальше, введем некоторые обозначения. Векторы (а также координатные оси), перпендикулярные к плоскости рисунка, мы будем изображать кружком с крестиком внутри, если вектор (или ось) направлены «от нас» и кружком с точкой в его центре, если вектор (или ось) направлены «на нас». Чтобы придать наглядность этим обозначениям, рассмотрим стрелу с конусообразным наконечником и крестообразным оперением на хвосте (рис. 1.16). В случае, когда стрела летит от нас,

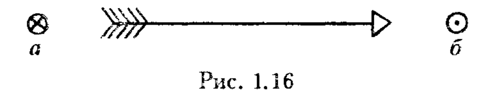


Рис. 1.16

видны ободок наконечника и хвостовое оперение (*а*); если стрела летит на нас, виден ободок наконечника и острие стрелы в виде точки.

Векторное произведение. Векторным произведением векторов **a** и **b** называется вектор **c**, определяемый формулой

$$\mathbf{c} = ab\sin\alpha \cdot \mathbf{n}, \tag{1.27}$$

где a и b — модули перемножаемых векторов, α — угол между векторами, **n** — единичный вектор нормали к плоскости[8]), в которой лежат векторы **a** и **b** (рис. 1.17). Направление **n** выбирается так, чтобы последовательность

[8]) Обозначение **n** проще и нагляднее, чем $\mathbf{e}_n$.

векторов **a**, **b**, **n** образовывала правовинтовую систему. Это означает, что если смотреть вслед вектору **n**, то совершаемый по кратчайшему пути поворот от первого сомножителя ко второму осуществляется по часовой стрелке. На рис. 1.17 вектор **n** направлен «от нас» и поэтому изображен кружком с крестиком. Направление вектора **c** совпадает с направлением **n**.

Символически векторное произведение можно записать двумя способами:

$$[\mathbf{ab}] \quad \text{или} \quad \mathbf{a}\times\mathbf{b}.$$

Мы будем пользоваться первым из них, причем иногда во избежание путаницы будем ставить запятую между сомножителями. Итак, согласно (1.27)

$$[\mathbf{ab}] = ab\sin\alpha\cdot\mathbf{n}. \tag{1.28}$$

Из рис. 1.17 видно, что модуль векторного произведения имеет простой геометрический смысл: выражение $ab\sin\alpha$ численно равно площади параллелограмма, построенного на перемножаемых векторах.

Направление вектора $[\mathbf{ab}]$ мы определили, связав его с направлением вращения от первого сомножителя ко второму. При рассмотрении таких векторов, как радиус-вектор **r**, скорость **v**, сила **F** и т. п., вопрос о выборе их направления не возникает — оно вытекает естественным образом из природы самих величин. Подобные векторы называются истинными (или полярными). Векторы типа $[\mathbf{ab}]$, направление которых связывается с направлением вращения, называются псевдовекторами (или аксиальными векторами). При изменении условия, например при переходе от правой системы координат к левой, направления псевдовекторов изменяются на обратные, истинные же векторы при этом остаются без изменений.

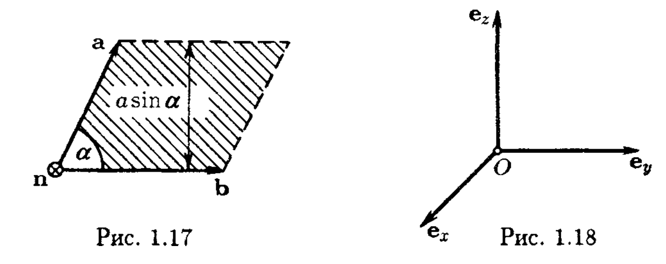


Рис. 1.17 Рис. 1.18

Следует иметь в виду, что векторное произведение будет псевдовектором только в том случае, когда оба перемножаемых вектора являются истинными (или оба — псевдовекторы). Векторное же произведение истинного вектора на псевдовектор будет истинным вектором. Изменение условия, определяющего направление псевдовекторов, на обратное приведет в этом случае к изменению знака перед векторным произведением и одновременно к изменению знака перед одним из сомножителей. В итоге величина, выражаемая векторным произведением, останется без изменений.

Поскольку направление векторного произведения определяется направлением вращения от первого сомножителя ко второму, результат векторного перемножения зависит от порядка сомножителей. Перестановка сомножителей вызывает изменение направления результирующего вектора на противоположное. Таким образом, векторное произведение не обладает свойством коммутативности:

$$[\mathbf{ba}] = -[\mathbf{ab}]. \tag{1.29}$$

Можно доказать, что векторное произведение дистрибутивно, т. е. что

$$[\mathbf{a}(\mathbf{b}_1 + \mathbf{b}_2 + \ldots)] = [\mathbf{ab}_1] + [\mathbf{ab}_2] + \ldots \tag{1.30}$$

Рассмотрим векторные произведения ортов координатных осей (рис. 1.18). В соответствии с определением (1.28)

$$\begin{gathered}
[\mathbf{e}_x\mathbf{e}_x] = [\mathbf{e}_y\mathbf{e}_y] = [\mathbf{e}_z\mathbf{e}_z] = 0,\\
[\mathbf{e}_x\mathbf{e}_y] = -[\mathbf{e}_y\mathbf{e}_x] = \mathbf{e}_z,\\
[\mathbf{e}_y\mathbf{e}_z] = -[\mathbf{e}_z\mathbf{e}_y] = \mathbf{e}_x,\\
[\mathbf{e}_z\mathbf{e}_x] = -[\mathbf{e}_x\mathbf{e}_z] = \mathbf{e}_y.
\end{gathered} \tag{1.31}$$

Представив перемножаемые векторы в виде (1.9) и воспользовавшись дистрибутивностью векторного произведения, получим

$$\begin{aligned}
[\mathbf{ab}] = [(a_x\mathbf{e}_x + a_y\mathbf{e}_y + a_z\mathbf{e}_z)\,(b_x\mathbf{e}_x + b_y\mathbf{e}_y + b_z\mathbf{e}_z)] =\\
= a_xb_x[\mathbf{e}_x\mathbf{e}_x] + a_xb_y[\mathbf{e}_x\mathbf{e}_y] + a_xb_z[\mathbf{e}_x\mathbf{e}_z] +\\
+ a_yb_x[\mathbf{e}_y\mathbf{e}_x] + a_yb_y[\mathbf{e}_y\mathbf{e}_y] + a_yb_z[\mathbf{e}_y\mathbf{e}_z] +\\
+ a_zb_x[\mathbf{e}_z\mathbf{e}_x] + a_zb_y[\mathbf{e}_z\mathbf{e}_y] + a_zb_z[\mathbf{e}_z\mathbf{e}_z].
\end{aligned}$$

Учтя соотношения (1.31), придем к следующему выражению:

$$[\mathbf{ab}] = \mathbf{e}_x(a_y b_z - a_z b_y) + \mathbf{e}_y(a_z b_x - a_x b_z) + \mathbf{e}_z(a_x b_y - a_y b_x). \tag{1.32}$$

Полученное выражение можно представить в виде определителя:

$$[\mathbf{ab}] = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_x & \mathbf{e}_y & \mathbf{e}_z \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}. \tag{1.33}$$

Смешанное произведение. Смешанным (или скалярно-векторным) произведением трех векторов называется выражение $\mathbf{a}[\mathbf{bc}]$, т. е. скалярное произведение вектора $\mathbf{a}$ на векторное произведение векторов $\mathbf{b}$ и $\mathbf{c}$. Согласно определениям (1.15) и (1.28)

$$\mathbf{a}[\mathbf{bc}] = a\{bc\sin(\mathbf{b},\mathbf{c})\}\cos(\mathbf{a},\mathbf{n}).$$

Здесь $(\mathbf{b},\mathbf{c})$ — угол между векторами $\mathbf{b}$ и $\mathbf{c}$, $(\mathbf{a},\mathbf{n})$ — угол между вектором $\mathbf{a}$ и ортом нормали $\mathbf{n}$, определяющим направление вектора $[\mathbf{bc}]$. Из рис. 1.19 видно, что выражение $bc\sin(\mathbf{b},\mathbf{c})$ численно равно площади основания параллелепипеда, построенного на перемножаемых векторах, а выражение $a\cos(\mathbf{a},\mathbf{n})$ численно равно высоте этого параллелепипеда, взятой со знаком плюс, если угол $(\mathbf{a},\mathbf{n})$ острый, и со знаком минус, если этот угол тупой. Следовательно, выражение $\mathbf{a}[\mathbf{bc}]$ имеет простой геометрический смысл — оно численно равно объему параллелепипеда, построенного на перемножаемых векторах (взятому со знаком плюс или минус в зависимости от угла $(\mathbf{a},\mathbf{n})$). При вычислении объема параллелепипеда результат не может зависеть от того, какая из его граней взята в качестве основания. Отсюда следует, что

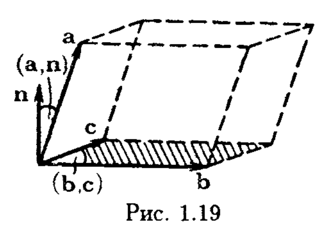


Рис. 1.19

$$\mathbf{a}[\mathbf{bc}] = \mathbf{b}[\mathbf{ca}] = \mathbf{c}[\mathbf{ab}]. \tag{1.34}$$

Таким образом, смешанное произведение допускает циклическую перестановку сомножителей, т. е. замену каждого из сомножителей следующим за ним в цикле:

$$\begin{array}{ccc} & \mathbf{a} & \\ \nearrow & & \searrow \\ \mathbf{c} & \longleftarrow & \mathbf{b} \end{array}$$

Двойное векторное произведение. Рассмотрим двойное векторное произведение трех векторов **a**, **b** и **c**

$$\mathbf{d} = [\mathbf{a}[\mathbf{bc}]].$$

Всякое векторное произведение перпендикулярно к обоим сомножителям. Поэтому вектор **d** перпендикулярен к орту **n**, определяющему направление вектора [**bc**]. Отсюда вытекает, что вектор **d** лежит в плоскости, образованной векторами **b** и **c**, и, следовательно, может быть представлен как линейная комбинация этих векторов (см. (1.5)):

$$\mathbf{d} = \alpha\mathbf{b} + \beta\mathbf{c}.$$

Умножив скалярно вектор **d** на перпендикулярный к нему вектор **a**, получим соотношение

$$\mathbf{ad} = \alpha\mathbf{ab} + \beta\mathbf{ac} = 0.$$

Отсюда следует, что коэффициенты α и β можно представить в виде

$$\alpha = \mu\mathbf{ac}, \quad \beta = -\mu\mathbf{ab},$$

где μ — некоторое число. Следовательно, можно написать, что

$$\mathbf{d} = [\mathbf{a}[\mathbf{bc}]] = \mu\{\mathbf{b}(\mathbf{ac}) - \mathbf{c}(\mathbf{ab})\}.$$

Чтобы найти μ, направим координатную ось x параллельно вектору **a** и напишем компоненты векторов по оси z. В результате получим

$$d_z = a_x[\mathbf{bc}]_{\text{пр}\, y} - a_y[\mathbf{bc}]_{\text{пр}.x} = \mu(b_z\mathbf{ac} - c_z\mathbf{ab}).$$

Приняв во внимание, что $a_x = a$, $a_y = a_z = 0$, и раскрыв выражение $[\mathbf{bc}]_{\text{пр}.y}$, придем к равенству

$$a(b_z c_x - b_x c_z) = \mu(b_z a c_x - c_z a b_x)$$

($\mathbf{ac} = a_x c_x + a_y c_y + a_z c_z = a c_x$; аналогично $\mathbf{ab} = a b_x$). Из полученного равенства следует, что $\mu = 1$. Таким образом,

$$[\mathbf{a}[\mathbf{bc}]] = \mathbf{b}(\mathbf{ac}) - \mathbf{c}(\mathbf{ab}). \qquad (1.35)$$

Запоминание этой формулы облегчается тем, что ее можно прочесть как «бац минус цаб».

Производная вектора. Рассмотрим вектор, который изменяется со временем по известному закону $\mathbf{a}(t)$. Проекции этого вектора на координатные оси представляют собой заданные функции времени. Следовательно,

$$\mathbf{a}(t)=\mathbf{e}_x a_x(t)+\mathbf{e}_y a_y(t)+\mathbf{e}_z a_z(t) \tag{1.36}$$

(мы предполагаем, что координатные оси не поворачиваются в пространстве, так что орты осей со временем не изменяются).

Пусть за промежуток времени Δt проекции вектора получают приращения Δa_x, Δa_y, Δa_z. Тогда вектор получит приращение $\Delta\mathbf{a}=\mathbf{e}_x\Delta a_x+\mathbf{e}_y\Delta a_y+\mathbf{e}_z\Delta a_z$. Скорость изменения вектора $\mathbf{a}$ со временем можно охарактеризовать отношением

$$\frac{\Delta\mathbf{a}}{\Delta t}=\mathbf{e}_x\frac{\Delta a_x}{\Delta t}+\mathbf{e}_y\frac{\Delta a_y}{\Delta t}+\mathbf{e}_z\frac{\Delta a_z}{\Delta t}. \tag{1.37}$$

Это отношение дает среднюю скорость изменения $\mathbf{a}$ в течение промежутка времени Δt. Допустим, что $\mathbf{a}$ изменяется со временем непрерывно, без скачков. Тогда чем меньше промежуток Δt, тем точнее величина (1.37) характеризует скорость изменения $\mathbf{a}$ в момент времени t, предшествующий интервалу Δt. Следовательно, скорость изменения вектора $\mathbf{a}$ в момент времени t равна пределу отношения (1.37), получающемуся при неограниченном уменьшении Δt скорость изменения

$$\dot{\mathbf{a}}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\mathbf{a}}{\Delta t}=\mathbf{e}_x\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta a_x}{\Delta t}+\\ +\mathbf{e}_y\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta a_y}{\Delta t}+\mathbf{e}_z\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta a_z}{\Delta t}. \tag{1.38}$$

Если есть некоторая функция $f(t)$, то предел отношения приращения функции Δf к приращению аргумента Δt, получающийся при стремлении Δt к нулю, называется производной функции f по t и обозначается символом df/dt. Итак, выражение (1.38) можно записать следующим образом:

$$\frac{d\mathbf{a}}{dt}=\mathbf{e}_x\frac{da_x}{dt}+\mathbf{e}_y\frac{da_y}{dt}+\mathbf{e}_z\frac{da_z}{dt}. \tag{1.39}$$

Полученный результат означает, что проекции вектора $d\mathbf{a}/dt$ на координатные оси равны производным по времени проекций вектора $\mathbf{a}$:

$$\left(\frac{d\mathbf{a}}{dt}\right)_{\text{пр}.x} = \frac{da_x}{dt}, \quad \left(\frac{d\mathbf{a}}{dt}\right)_{\text{пр}.y} = \frac{da_y}{dt}, \quad \left(\frac{d\mathbf{a}}{dt}\right)_{\text{пр}.z} = \frac{da_z}{dt}. \tag{1.40}$$

В физике производные по времени принято обозначать символом соответствующей величины с точкой над ним, например

$$\frac{d\varphi}{dt} = \dot{\varphi}, \quad \frac{d^2\varphi}{dt^2} = \ddot{\varphi}, \quad \frac{d\mathbf{a}}{dt} = \dot{\mathbf{a}}, \quad \frac{d^2\mathbf{a}}{dt^2} = \ddot{\mathbf{a}}. \tag{1.41}$$

Воспользовавшись таким обозначением, формуле (1.39) можно придать вид

$$\dot{\mathbf{a}} = \mathbf{e}_x\dot{a}_x + \mathbf{e}_y\dot{a}_y + \mathbf{e}_z\dot{a}_z. \tag{1.42}$$

Если в качестве $\mathbf{a}(t)$ взять радиус-вектор $\mathbf{r}(t)$ движущейся точки, то согласно (1.42)

$$\dot{\mathbf{r}} = \mathbf{e}_x\dot{x} + \mathbf{e}_y\dot{y} + \mathbf{e}_z\dot{z}, \tag{1.43}$$

где x, y, z суть функции от t: $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$.

Дифференциалом («приращением») функции $f(t)$ называется выражение

$$df = f'\,dt, \tag{1.44}$$

где f' — производная f по t. Согласно (1.39) дифференциал («приращение») вектора $\mathbf{a}$ определяется формулой

$$d\mathbf{a} = \mathbf{e}_x da_x + \mathbf{e}_y da_y + \mathbf{e}_z da_z. \tag{1.45}$$

В частности,

$$d\mathbf{r} = \mathbf{e}_x dx + \mathbf{e}_y dy + \mathbf{e}_z dz. \tag{1.46}$$

Заметим, что приращение функции за очень малый, но конечный промежуток времени Δt приближенно равно

$$\Delta f \approx f'\Delta t = \frac{df}{dt}\Delta t. \tag{1.47}$$

В пределе при $\Delta t \to 0$ приближенное равенство (1.47) переходит в точное равенство (1.44).

Формулу, аналогичную (1.47), можно написать и для векторной функции:

$$\Delta \mathbf{a} \approx \frac{d\mathbf{a}}{dt}\Delta t. \tag{1.48}$$

Производная произведения функций. Рассмотрим функцию $\mathbf{b}(t)$, которая равна произведению скалярной функции $\varphi(t)$ на векторную функцию $\mathbf{a}(t)$: $\mathbf{b}(t) = \varphi(t)\cdot\mathbf{a}(t)$, или сокращенно: $\mathbf{b} = \varphi\mathbf{a}$. Найдем приращение функции $\mathbf{b}$:

$$\Delta\mathbf{b} = \Delta(\varphi\mathbf{a}) = (\varphi+\Delta\varphi)(\mathbf{a}+\Delta\mathbf{a})-\varphi\mathbf{a} = \varphi\Delta\mathbf{a}+\mathbf{a}\Delta\varphi+\Delta\varphi\Delta\mathbf{a}.$$

Представив приращения функций в виде (1.47) и (1 48), получим

$$\Delta\mathbf{b} \approx \varphi\frac{d\mathbf{a}}{dt}\Delta t + \mathbf{a}\frac{d\varphi}{dt}\Delta t + \frac{d\varphi}{dt}\frac{d\mathbf{a}}{dt}(\Delta t)^2,$$

откуда

$$\frac{\Delta\mathbf{b}}{\Delta t} \approx \varphi\frac{d\mathbf{a}}{dt} + \mathbf{a}\frac{d\varphi}{dt} + \frac{d\varphi}{dt}\frac{d\mathbf{a}}{dt}\Delta t.$$

В пределе при $\Delta t \to 0$ это приближенное равенство превращается в точное. Таким образом,

$$\frac{d\mathbf{b}}{dt} = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\mathbf{b}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t\to 0}\left(\varphi\frac{d\mathbf{a}}{dt} + \mathbf{a}\frac{d\varphi}{dt} + \frac{d\varphi}{dt}\frac{d\mathbf{a}}{dt}\Delta t\right).$$

Первые два слагаемых не зависят от Δt и поэтому при переходе к пределу не изменяются. Предел третьего слагаемого равен нулю. Следовательно, заменив $\mathbf{b}$ на $\varphi\mathbf{a}$, получим

$$\frac{d}{dt}(\varphi\mathbf{a}) = \varphi\frac{d\mathbf{a}}{dt} + \mathbf{a}\frac{d\varphi}{dt} = \varphi\dot{\mathbf{a}} + \dot{\varphi}\mathbf{a}. \tag{1.49}$$

Теперь рассмотрим скалярное произведение двух векторных функций $\mathbf{a}(t)$ и $\mathbf{b}(t)$. Приращение этого произведения равно

$$\Delta(\mathbf{a}\mathbf{b}) = (\mathbf{a}+\Delta\mathbf{a})(\mathbf{b}+\Delta\mathbf{b}) - \mathbf{a}\mathbf{b} = \mathbf{a}\Delta\mathbf{b} + \mathbf{b}\Delta\mathbf{a} + \\ + \Delta\mathbf{a}\Delta\mathbf{b} \approx \mathbf{a}\dot{\mathbf{b}}\Delta t + \mathbf{b}\dot{\mathbf{a}}\Delta t + \dot{\mathbf{a}}\dot{\mathbf{b}}(\Delta t)^2.$$

Отсюда

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{ab}) = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta(\mathbf{ab})}{\Delta t} = \lim_{\Delta t\to 0}(\mathbf{a\dot b} + \mathbf{b\dot a} + \mathbf{\dot a\dot b}\Delta t)$$

или окончательно

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{ab}) = \mathbf{a\dot b} + \mathbf{\dot a b}. \tag{1.50}$$

Умножив (1.50) на dt, получим дифференциал:

$$d(\mathbf{ab}) = \mathbf{a}\,d\mathbf{b} + \mathbf{b}\,d\mathbf{a}. \tag{1.51}$$

Вычислим производную и дифференциал квадрата векторной функции. Согласно (1.50) и (1.51)

$$\frac{d}{dt}\mathbf{a}^2 = 2\mathbf{a\dot a}, \tag{1.52}$$

$$d(\mathbf{a}^2) = 2\mathbf{a}\,d\mathbf{a}. \tag{1.53}$$

Учтя, что $\mathbf{a}^2 = a^2$ (см. (1.16)), можно написать

$$2\mathbf{a}\,d\mathbf{a} = d(a^2), \quad \text{или} \quad \mathbf{a}\,d\mathbf{a} = d(a^2/2). \tag{1.54}$$

Наконец, рассмотрим производную векторного произведения функций $\mathbf{a}(t)$ и $\mathbf{b}(t)$. Приращение рассматриваемой функции равно

$$\Delta[\mathbf{ab}] = [(\mathbf{a} + \Delta\mathbf{a})\,(\mathbf{b} + \Delta\mathbf{b})] - [\mathbf{ab}] = \\ = [\mathbf{a}\,\Delta\mathbf{b}] + [\Delta\mathbf{a}\,\mathbf{b}] + [\Delta\mathbf{a}\,\Delta\mathbf{b}] \approx \\ \approx [\mathbf{a}\,\mathbf{\dot b}\Delta t] + [\mathbf{\dot a}\Delta t\,\mathbf{b}] + [\mathbf{\dot a}\Delta t\,\mathbf{\dot b}\Delta t].$$

Соответственно

$$\frac{d}{dt}[\mathbf{ab}] = \lim_{\Delta t\to 0}\{[\mathbf{a\dot b}] + [\mathbf{\dot a b}] + [\mathbf{\dot a\dot b}]\Delta t\}.$$

Осуществив предельный переход, придем к формуле

$$\frac{d}{dt}[\mathbf{ab}] = [\mathbf{a\dot b}] + [\mathbf{\dot a b}]. \tag{1.55}$$

Производная единичного вектора. Рассмотрим орт $\mathbf{e}_a$ вектора $\mathbf{a}$. Очевидно, что вектор $\mathbf{e}_a$ может изменяться только по направлению. Пусть за очень малый промежуток времени Δt вектор $\mathbf{a}$ и вместе с ним орт $\mathbf{e}_a$ поворачиваются на угол $\Delta\varphi$ (рис. 1.20). При малом $\Delta\varphi$ модуль вектора $\Delta\mathbf{e}_a$ приближенно равен углу $\Delta\varphi$: $|\Delta\mathbf{e}_a| \approx \Delta\varphi$ (отрезок, изображающий $\Delta\mathbf{e}_a$, является основанием равнобедренного треугольника со сторонами, равными единице). Заметим, что чем меньше $\Delta\varphi$, тем точнее соблюдается написанное нами приближенное равенство. Сам вектор $\Delta\mathbf{e}_a$ можно представить в виде

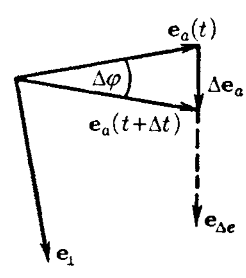


Рис 1 20

$$\Delta\mathbf{e}_a = |\Delta\mathbf{e}_a|\,\mathbf{e}_{\Delta e} \approx \Delta\varphi\cdot\mathbf{e}_{\Delta e},$$

где $\mathbf{e}_{\Delta e}$ — орт вектора $\Delta\mathbf{e}_a$. При стремлении $\Delta\varphi$ к нулю орт $\mathbf{e}_{\Delta e}$ будет поворачиваться и в пределе совпадет с перпендикулярным к $\mathbf{e}_a$ единичным вектором $\mathbf{e}_\perp$ (рис. 1.20).

Производная $\mathbf{e}_a$ по t по определению равна

$$\frac{d\mathbf{e}_a}{dt} = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\mathbf{e}_a}{\Delta t} = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\varphi}{\Delta t}\mathbf{e}_{\Delta e} = \frac{d\varphi}{dt}\mathbf{e}_\perp.$$

Таким образом,

$$\dot{\mathbf{e}}_a = \dot\varphi\,\mathbf{e}_\perp. \qquad (1.56)$$

Величина $\dot\varphi = d\varphi/dt$ есть угловая скорость вращения вектора $\mathbf{a}$ (см. § 1.5). Орт $\mathbf{e}_\perp$ лежит в той плоскости, в которой поворачивается в данный момент вектор $\mathbf{a}$, причем направлен он в ту сторону, в которую происходит вращение.

1.3. Скорость

Материальная точка при своем движении описывает некоторую линию. Эта линия называется траекторией. В зависимости от формы траектории различают прямолинейное движение, движение по окружности, криволинейное движение и т. д.

Пусть материальная точка (в дальнейшем для краткости мы будем называть ее частицей) переместилась вдоль некоторой траектории из точки *1* в точку *2* (рис. 1.21).

Расстояние между точками *1* и *2*, отсчитанное вдоль траектории, называется **п у т е м**, пройденным частицей. Мы будем обозначать его буквой s.

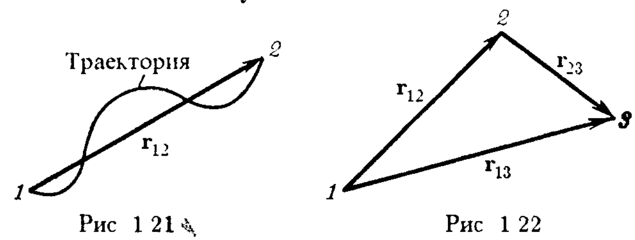


Рис 1 21 Рис 1 22

Прямолинейный отрезок, проведенный из точки *1* в точку *2*, называется п е р е м е щ е н и е м частицы. Обозначим его символом $\mathbf{r}_{12}$. Предположим, что частица совершает последовательно два перемещения: $\mathbf{r}_{12}$ и $\mathbf{r}_{23}$ (см. рис. 1.22). Суммой этих перемещений естественно назвать такое перемещение $\mathbf{r}_{13}$, которое приводит к тому же результату, что и первые два перемещения вместе. Таким образом, перемещения характеризуются числовым значением и направлением и, кроме того, складываются по правилу параллелограмма. Отсюда следует, что перемещение есть вектор.

В обыденной жизни под с к о р о с т ь ю понимают путь, проходимый частицей за единицу времени. Если за равные, сколь угодно малые промежутки времени частица проходит одинаковые пути, движение частицы называют р а в н о м е р н ы м. В этом случае скорость, которой обладает частица в каждый момент времени, можно вычислить, разделив путь s на время t.

В физике под скоростью понимают векторную величину, характеризующую не только быстроту перемещения частицы по траектории, но и направление, в котором движется эта частица в каждый момент времени. Разобьем траекторию на бесконечно малые участки длины ds (рис. 1.23). Каждому из участков сопоставим бесконечно малое перемещение $d\mathbf{r}$. Разделив это перемещение на соответствующий промежуток времени dt, получим мгновенную скорость в данной точке траектории:

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \dot{\mathbf{r}}. \qquad (1.57)$$

Таким образом, скорость есть производная радиуса-вектора частицы по времени. Перемещение $d\mathbf{r}$ совпадает с бес-

конечно малым элементом траектории. Следовательно, вектор $\mathbf{v}$ направлен по касательной к траектории (см. рис. 1.23).

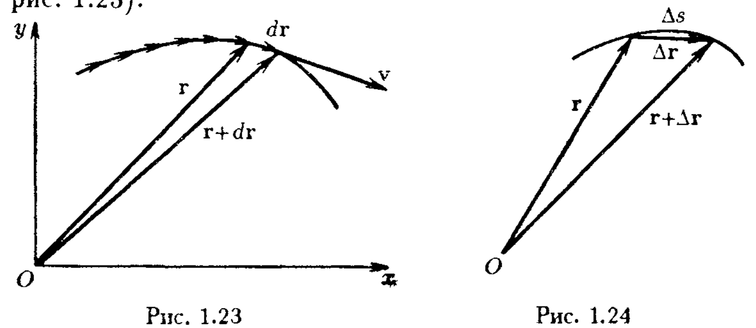


Рис. 1.23 Рис. 1.24

Рассуждая более строго, для получения формулы (1.57) нужно поступить следующим образом. Зафиксировав некоторый момент времени t, рассмотрим приращение радиуса-вектора $\Delta\mathbf{r}$ за малый промежуток времени Δt[9]), следующий за t (рис. 1.24). Отношение $\Delta\mathbf{r}/\Delta t$ дает среднее значение скорости за время Δt. Если брать все меньшие промежутки времени Δt, отношение $\Delta\mathbf{r}/\Delta t$ в пределе даст скорость $\mathbf{v}$ в момент времени t:

$$\mathbf{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\mathbf{r}}{\Delta t} = \frac{d\mathbf{r}}{dt}. \qquad (1.58)$$

Мы пришли к формуле (1.57).

Найдем модуль выражения (1.58), т. е. модуль скорости $\mathbf{v}$:

$$v = |\mathbf{v}| = \left|\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\mathbf{r}}{\Delta t}\right| = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{|\Delta\mathbf{r}|}{\Delta t}. \qquad (1.59)$$

В этой формуле нельзя написать Δr вместо $|\Delta\mathbf{r}|$. Вектор $\Delta\mathbf{r}$ есть, по существу, разность двух векторов ($\mathbf{r}$ в момент $t+\Delta t$ минус $\mathbf{r}$ в момент t). Поэтому его модуль можно записать только с помощью вертикальных черточек (см. (1.2)). Символ $|\Delta\mathbf{r}|$ обозначает модуль приращения век-

[9]) Символом Δ (дельта) пользуются в двух случаях: а) для обозначения приращения какой-либо величины. В рассматриваемом случае $\Delta\mathbf{r}$ есть приращение радиуса-вектора $\mathbf{r}$ за время Δt; б) для обозначения доли какой-либо величины. Например, Δt есть часть всего времени t, в течение которого происходит движение, Δs — часть всего пути s, проходимого частицей.

тора $\mathbf{r}$, в то время как Δr представляет собой приращение модуля вектора $\mathbf{r}$: $\Delta|\mathbf{r}|$. Обе эти величины, вообще говоря, не равны друг другу:

$$|\Delta\mathbf{r}| \neq \Delta|\mathbf{r}| = \Delta r.$$

В этом можно убедиться на следующем примере. Пусть вектор $\mathbf{r}$ получает такое приращение $\Delta\mathbf{r}$, что модуль его не изменяется: $|\mathbf{r} + \Delta\mathbf{r}| = |\mathbf{r}|$ (рис. 1.25). Тогда приращение модуля вектора равно нулю ($\Delta|\mathbf{r}| = \Delta r = 0$). В то же время модуль приращения вектора $\mathbf{r}$, т. е. $|\Delta\mathbf{r}|$, отличен от нуля (он равен длине отрезка *2*—*3*). Сказанное справедливо для любого вектора $\mathbf{a}$: в общем случае $|\Delta\mathbf{a}| \neq \Delta a$. Из рис. 1.24 видно, что путь Δs, вообще говоря, отличен от модуля перемещения $|\Delta\mathbf{r}|$. Однако если брать отрезки пути Δs и перемещения $\Delta\mathbf{r}$, соответствующие все меньшим промежуткам времени Δt, то различие между Δs и $|\Delta\mathbf{r}|$ будет убывать и их отношение в пределе станет равным единице:

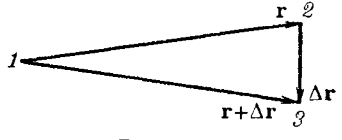


Рис. 1.25

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{|\Delta\mathbf{r}|} = 1.$$

На этом основании можно заменить в формуле (1.59) $|\Delta\mathbf{r}|$ на Δs. В результате получится выражение

$$v = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{ds}{dt}. \qquad (1.60)$$

Таким образом, модуль скорости равен производной пути по времени.

Очевидно, что величина, называемая в обыденной жизни скоростью, на самом деле представляет собой модуль скорости $\mathbf{v}$. При равномерном движении модуль скорости остается неизменным ($v = \text{const}$), в то время как направление вектора $\mathbf{v}$ изменяется произвольным образом (в частности, может быть постоянным).

В соответствии с формулой (1.57) элементарное перемещение частицы равно

$$d\mathbf{r} = \mathbf{v}\,dt. \qquad (1.61)$$

Иногда для наглядности мы будем обозначать элементарное перемещение символом ds, т. е. писать (1.61) в виде

$$ds = \mathbf{v}\,dt. \tag{1.62}$$

Вектор скорости, как и всякий другой вектор, можно представить в виде

$$\mathbf{v} = v_x\mathbf{e}_x + v_y\mathbf{e}_y + v_z\mathbf{e}_z, \tag{1.63}$$

где v_x, v_y, v_z — проекции вектора $\mathbf{v}$ на координатные оси. Вместе с тем равный $\mathbf{v}$ вектор $\dot{\mathbf{r}}$ согласно формуле (1.43) выглядит следующим образом:

$$\dot{\mathbf{r}} = \dot{x}\mathbf{e}_x + \dot{y}\mathbf{e}_y + \dot{z}\mathbf{e}_z. \tag{1.64}$$

Из сравнения выражений (1.63) и (1.64) вытекает, что

$$v_x = \dot{x}, \quad v_y = \dot{y}, \quad v_z = \dot{z}. \tag{1.65}$$

Следовательно, проекция вектора скорости на координатную ось равна производной по времени соответствующей координаты движущейся частицы. Приняв во внимание (1.10), получим формулу

$$v = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}. \tag{1.66}$$

Вектор скорости можно представить в виде $\mathbf{v} = v\mathbf{e}_v$, где v — модуль скорости, а $\mathbf{e}_v$ — орт вектора $\mathbf{v}$. Введем орт касательной к траектории $\boldsymbol{\tau}$, условившись направлять его в ту же сторону, что и $\mathbf{v}$. Тогда очевидно, что орты $\mathbf{e}_v$ и $\boldsymbol{\tau}$ совпадут, так что можно написать следующее выражение:

$$\mathbf{v} = v\mathbf{e}_v = v\boldsymbol{\tau}. \tag{1.67}$$

Получим еще одно выражение для $\mathbf{v}$. С этой целью подставим в формулу (1.57) радиус-вектор в виде $\mathbf{r} = r\mathbf{e}_r$. Согласно (1.49)

$$\mathbf{v} = \dot{\mathbf{r}} = \dot{r}\mathbf{e}_r + r\dot{\mathbf{e}}_r. \tag{1.68}$$

Для простоты ограничимся случаем, когда траектория является плоской кривой, т. е. такой кривой, все точки которой лежат в одной плоскости. Примем эту плоскость за

плоскость xy. В формуле (1 68) вектор **v** оказался представленным в виде суммы двух составляющих (рис. 1.26). Первая составляющая, которую мы обозначим $\mathbf{v}_r$, равна

$$\mathbf{v}_r = \dot{r}\mathbf{e}_r. \qquad (1.69)$$

Она направлена вдоль радиуса-вектора **r** и характеризует быстроту изменения модуля **r**. Вторая составляющая, которую мы обозначим $\mathbf{v}_\varphi$, равна

$$\mathbf{v}_\varphi = r\dot{\mathbf{e}}_r. \qquad (1.70)$$

Рис. 1.26

Эта составляющая характеризует быстроту изменения радиуса-вектора по направлению.

Воспользовавшись формулой (1.56), можно написать

$$\dot{\mathbf{e}}_r = \frac{d\varphi}{dt}\mathbf{e}_\varphi = \dot{\varphi}\mathbf{e}_\varphi,$$

где φ — угол между радиусом-вектором и осью x, $\mathbf{e}_\varphi$ — перпендикулярный к радиусу-вектору орт, направленный в сторону возрастания угла φ (в формуле (1.56) этот орт был обозначен $\mathbf{e}_\perp$). Подставив это выражение для $\dot{\mathbf{e}}_r$ в (1.70), получим

$$\mathbf{v}_\varphi = r\dot{\varphi}\,\mathbf{e}_\varphi. \qquad (1.71)$$

Мы ввели обозначения $\mathbf{v}_\varphi$ и $\mathbf{e}_\varphi$, чтобы подчеркнуть, что составляющая $\mathbf{v}_\varphi$ и соответствующий орт связаны с изменением угла φ.

Очевидно, что векторы $\mathbf{v}_r$ и $\mathbf{v}_\varphi$ взаимно перпендикулярны. Следовательно,

$$v = \sqrt{v_r^2 + v_\varphi^2} = \sqrt{\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2}. \qquad (1.72)$$

Рассмотрим вопрос о том, как, зная модуль скорости в каждый момент времени, вычислить путь, проходимый частицей с момента времени t_1 до момента t_2. Разобьем промежуток времени t_2—t_1 на N малых, не обязательно одинаковых промежутков: $\Delta t_1, \Delta t_2, \ldots, \Delta t_N$. Весь путь

s, пройденный частицей, можно представить как сумму отрезков $\Delta s_1, \Delta s_2, \ldots, \Delta s_N$, пройденных за соответствующие промежутки времени Δt:

$$s = \Delta s_1 + \Delta s_2 + \ldots + \Delta s_N = \sum_{i=1}^{N} \Delta s_i.$$

В соответствии с формулой (1.60) каждое из слагаемых может быть приближенно представлено в виде

$$\Delta s_i \approx v_i \Delta t_i,$$

где Δt_i — промежуток времени, за который был пройден путь Δs_i, а v_i — одно из значений скорости за время Δt_i. Следовательно,

$$s \approx \sum_{i=1}^{N} v_i \Delta t_i. \tag{1.73}$$

Написанное равенство выполняется тем точнее, чем меньше промежутки времени Δt_i. В пределе при стремлении всех Δt_i к нулю (количество промежутков Δt_i будет при этом неограниченно возрастать) приближенное равенство станет точным:

$$s = \lim_{\Delta t_i \to 0} \sum_{i=1}^{N} v_i \Delta t_i.$$

Полученное выражение представляет собой определенный интеграл от функции $v(t)$, взятый в пределах от t_1 до t_2. Таким образом, путь, проходимый частицей за промежуток времени от t_1 до t_2, равен

$$s = \int_{t_1}^{t_2} v(t)\, dt. \tag{1.74}$$

Подчеркнем, что здесь идет речь о модуле скорости. Если взять интеграл от самой скорости $\mathbf{v}(t)$, то получится вектор перемещения частицы из точки, в которой она была в момент t_1, в точку, в которой она оказалась в момент t_2 (см. (3.5)):

$$\int_{t_1}^{t_2} \mathbf{v}(t)\, dt = \int_{t_1}^{t_2} d\mathbf{r} = \mathbf{r}_{12}. \tag{1.75}$$

Если изобразить график зависимости v от t (рис. 1.27), то пройденный путь можно представить как площадь фигуры, ограниченной кривой $v(t)$, осью t и прямыми $t = t_1$ и $t = t_2$. Действительно, произведение $v_i \Delta t_i$ численно равно площади i-й полоски. Сумма (1.73) равна площади, ограниченной сверху ломаной линией, образованной верхними краями всех подобных полосок. При стремлении всех Δt_i к нулю ширина полосок убывает (одновременно число их растет), и ломаная линия в пределе сольется с кривой $v = v(t)$. Таким образом, путь, пройденный за время с момента t_1 до момента t_2, численно равен площади, ограниченной графиком функции $v = v(t)$, осью времени t и прямыми $t = t_1$ и $t = t_2$.

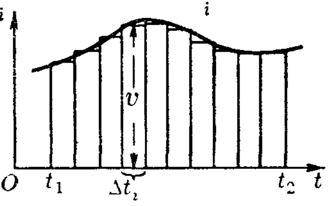


Рис 1 27

Заметим, что среднее значение модуля скорости за время от t_1 до t_2 по определению равно[10]

$$\langle v \rangle = \frac{s}{t_2 - t_1}.$$

Подставив сюда выражение (1.74) для s, получим

$$\langle v \rangle = \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} v(t)\, dt. \tag{1.76}$$

Аналогично вычисляются средние значения любых скалярных или векторных функций. Например, среднее значение скорости равно

$$\langle \mathbf{v} \rangle = \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} \mathbf{v}(t)\, dt = \frac{\mathbf{r}_{12}}{t_2 - t_1} \tag{1.77}$$

(см. (1.75)). Среднее значение функции $y(x)$ на промежутке от x_1 до x_2 определяется выражением

$$\langle y \rangle = \frac{1}{x_2 - x_1} \int_{x_1}^{x_2} y(x)\, dx. \tag{1.78}$$

[10]) Для обозначения среднего значения какой-либо величины мы будем заключать символ этой величины в угловые скобки $\langle\ \rangle$.

1.4. Ускорение

Скорость частицы $\mathbf{v}$ может изменяться со временем как по модулю, так и по направлению. Быстрота изменения вектора $\mathbf{v}$, как и быстрота изменения любой функции времени, определяется производной вектора $\mathbf{v}$ по t. Обозначив эту производную буквой $\mathbf{w}$, получим

$$\mathbf{w} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \mathbf{v}}{\Delta t} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \dot{\mathbf{v}}. \qquad (1.79)$$

Величина, определяемая формулой (1.79), называется *ускорением* частицы.

Заметим, что ускорение $\mathbf{w}$ играет по отношению к $\mathbf{v}$ такую же роль, какую вектор $\mathbf{v}$ играет по отношению к радиусу-вектору $\mathbf{r}$.

Равные векторы имеют одинаковые проекции на координатные оси. Следовательно, например,

$$w_x = \left(\frac{d\mathbf{v}}{dt}\right)_{\text{пр}\,x} = \frac{dv_x}{dt} = \dot{v}_x$$

(см. (1.40)). Вместе с тем согласно (1.65) $v_x = \dot{x} = dx/dt$. Поэтому

$$\frac{dv_x}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{dx}{dt}\right) = \frac{d^2x}{dt^2} = \ddot{x}.$$

Мы получили, что проекция вектора ускорения на ось x равна второй производной координаты x по времени: $w_x = \ddot{x}$. Аналогичные выражения получаются для проекций ускорения на оси y и z. Таким образом,

$$w_x = \ddot{x}, \quad w_y = \ddot{y}, \quad w_z = \ddot{z}. \qquad (1.80)$$

Подставим в формулу (1.79) выражение (1.67) для $\mathbf{v}$:

$$\mathbf{w} = \frac{d}{dt}(v\boldsymbol{\tau}). \qquad (1.81)$$

Напомним, что $\boldsymbol{\tau}$ есть орт касательной к траектории, направленный в ту же сторону, что и $\mathbf{v}$. Согласно (1.49)

$$\mathbf{w} = \dot{v}\boldsymbol{\tau} + v\dot{\boldsymbol{\tau}}. \qquad (1.82)$$

Следовательно, вектор $\mathbf{w}$ можно представить в виде суммы двух составляющих. Одна из них коллинеарна с $\boldsymbol{\tau}$, т. е. направлена по касательной к траектории, и поэтому обозначается $\mathbf{w}_\tau$ и называется тангенциальным ускорением. Она равна

$$\mathbf{w}_\tau = \dot{v}\boldsymbol{\tau}. \tag{1.83}$$

Вторая составляющая, равная $v\dot{\boldsymbol{\tau}}$, направлена, как мы покажем ниже, по нормали к траектории и поэтому обозначается $\mathbf{w}_n$ и называется нормальным ускорением. Таким образом,

$$\mathbf{w}_n = v\dot{\boldsymbol{\tau}}. \tag{1.84}$$

Исследуем свойства обеих составляющих, ограничившись для простоты случаем, когда траектория является плоской кривой.

Модуль тангенциального ускорения (1.83) равен

$$|\mathbf{w}_\tau| = |\dot{v}|. \tag{1.85}$$

Если $\dot{v} > 0$ (скорость увеличивается), вектор $\mathbf{w}_\tau$ направлен в ту же сторону, что и $\boldsymbol{\tau}$ (т. е. в ту же сторону, что и $\mathbf{v}$). Если $\dot{v} < 0$ (скорость со временем уменьшается), векторы $\mathbf{v}$ и $\mathbf{w}_\tau$ направлены в противоположные стороны. При равномерном движении $\dot{v} = 0$ и, следовательно, тангенциального ускорения нет.

Чтобы выяснить свойства нормального ускорения (1.84), нужно установить, чем определяется $\dot{\boldsymbol{\tau}}$, т. е. быстрота изменения со временем направления касательной к траектории.

Легко сообразить, что эта быстрота будет тем больше, чем сильнее искривлена траектория и чем быстрее перемещается частица по траектории.

Степень искривленности плоской кривой характеризуется кривизной C, которая определяется выражением

$$C = \lim_{\Delta s \to 0} \frac{\Delta\varphi}{\Delta s} = \frac{d\varphi}{ds}, \tag{1.86}$$

где $\Delta\varphi$ — угол между касательными к кривой в точках, отстоящих друг от друга на Δs (рис. 1.28). Таким образом, кривизна определяет скорость поворота касательной при перемещении вдоль кривой.

Величина, обратная кривизне C, называется радиусом кривизны в данной точке кривой и обозначается буквой R:

$$R = \frac{1}{C} = \lim_{\Delta\varphi\to 0} \frac{\Delta s}{\Delta\varphi} = \frac{ds}{d\varphi}. \tag{1.87}$$

Радиус кривизны представляет собой радиус окружности, которая сливается в данном месте с кривой на бесконечно малом ее участке. Центр такой окружности называется центром кривизны для данной точки кривой.

Радиус и центр кривизны в точке 1 (см. рис. 1.28) можно определить следующим образом. Возьмем неподалеку от точки 1 точку 1'. Построим в этих точках касательные $\boldsymbol{\tau}$ и $\boldsymbol{\tau}'$. Перпендикуляры к касательным пересекутся в некоторой точке O'. Заметим, что для кривой, не являющейся окружностью, расстояния R' и R'' будут немного отличаться друг от друга. Если точку 1' приближать к точке 1, пересечение перпендикуляров O' будет перемещаться вдоль прямой R' и в пределе окажется в некоторой точке O. Эта точка и будет центром кривизны для точки 1. Расстояния R' и R'' будут стремиться к общему пределу R, равному радиусу кривизны. Действительно, если точки 1 и 1' расположены близко друг к другу, можно написать, что $\Delta\varphi \approx \approx \Delta s/R'$ или $R' \approx \Delta s/\Delta\varphi$. В пределе при $\Delta\varphi \to 0$ это приближенное равенство перейдет в строгое равенство $R = ds/d\varphi$, совпадающее с определением радиуса кривизны (см. (1.87)).

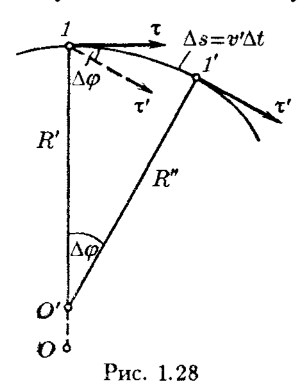


Рис. 1.28

Обратимся к вычислению $\mathbf{w}_n$ (см. (1.84)). Согласно (1.56)

$$\dot{\boldsymbol{\tau}} = \frac{d\varphi}{dt}\mathbf{n}, \tag{1.88}$$

где $\mathbf{n}$ — орт нормали к траектории, направленный в ту сторону, в которую поворачивается вектор $\boldsymbol{\tau}$ при движении частицы по траектории (в формуле (1.56) аналогичный орт был обозначен $\mathbf{e}_\perp$). Величину $d\varphi/dt$ можно связать с радиусом кривизны траектории и скоростью частицы v. Из

рис. 1.28 следует, что

$$\Delta\varphi \approx \frac{\Delta s}{R'} = \frac{v'\Delta t}{R'},$$

где $\Delta\varphi$ — угол поворота вектора $\boldsymbol{\tau}$ за время Δt (совпадающий с углом между перпендикулярами R' и R''), v' — средняя скорость на пути Δs. Отсюда

$$\frac{\Delta\varphi}{\Delta t} \approx \frac{v'}{R'}.$$

В пределе при $\Delta t \to 0$ приближенное равенство станет строгим, средняя скорость v' превратится в мгновенную скорость v в точке *1*, R' — в радиус кривизны R. В результате получится равенство

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{v}{R} = vC \tag{1.89}$$

(C — кривизна). Следовательно, быстрота поворота вектора скорости, как мы и предполагали, пропорциональна кривизне траектории и скорости перемещения частицы по траектории.

Подставив (1.89) в формулу (1.88), получим, что $\dot{\boldsymbol{\tau}} = (v/R)\mathbf{n}$. Наконец, подставив это выражение в (1.84), придем к окончательной формуле для нормального ускорения:

$$\mathbf{w}_n = \frac{v^2}{R}\mathbf{n}. \tag{1.90}$$

Итак, вектор ускорения при движении частицы по плоской кривой определяется следующим выражением:

$$\mathbf{w} = \mathbf{w}_\tau + \mathbf{w}_n = \dot{v}\boldsymbol{\tau} + \frac{v^2}{R}\mathbf{n}. \tag{1.91}$$

Модуль вектора $\mathbf{w}$ равен

$$w = \sqrt{|\mathbf{w}_\tau|^2 + |\mathbf{w}_n|^2} = \sqrt{\dot{v}^2 + (v^2/R)^2}. \tag{1.92}$$

При прямолинейном движении нормальное ускорение отсутствует. Заметим, что $\mathbf{w}_n$ обращается в нуль в точке перегиба криволинейной траектории (в точке *ТП* на

рис. 1.29). По обе стороны от этой точки векторы $\mathbf{w}_n$ направлены в противоположные стороны. Вектор $\mathbf{w}_n$ не может изменяться скачком; изменение направления на противоположное происходит плавно с обращением $\mathbf{w}_n$ в нуль в точке перегиба.

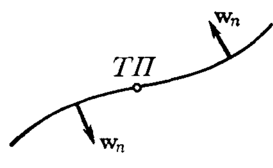


Рис 1 29

Пусть частица движется равномерно с постоянным по модулю ускорением. Поскольку при равномерном движении модуль скорости не изменяется, $\mathbf{w}_\tau = 0$, так что $\mathbf{w} = \mathbf{w}_n$. Постоянство по модулю $\mathbf{w}_n$ означает, что $v^2/R = \text{const}$. Отсюда следует, что $R = \text{const}$ ($v = \text{const}$ вследствие равномерности движения). Значит, частица движется по кривой постоянной кривизны, т. е. по окружности. Таким образом, в случае, когда ускорение частицы постоянно по модулю и направлено в каждый момент времени перпендикулярно к скорости, траекторией частицы будет окружность.

1.5. Кинематика вращательного движения

Поворот тела на некоторый угол φ можно задать в виде отрезка, длина которого равна φ, а направление совпадает с осью, вокруг которой производится поворот. Для того чтобы указать, в какую сторону совершается поворот вокруг данной оси, связывают направления поворота и изображающего его отрезка п р а в и л о м п р а в о г о в и н т а: направление отрезка должно быть таким, чтобы, глядя вдоль него (рис. 1.30), мы видели поворот совер-

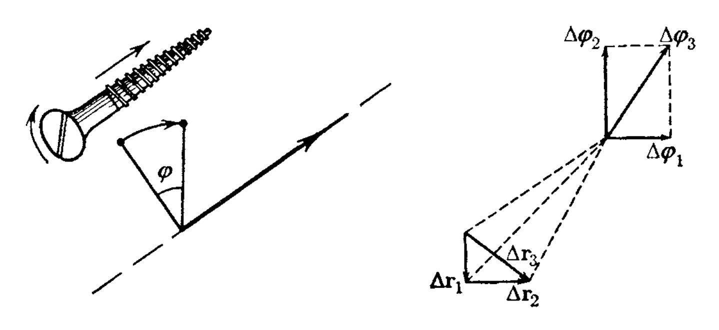


Рис. 1.30 Рис 1.31

шающимся по часовой стрелке (вращая головку правого винта по часовой стрелке, мы вызовем его перемещение от себя). В § 1.2 было показано (см. рис. 1.4), что повороты на конечные углы складываются не по правилу параллелограмма и поэтому не являются векторами. Иначе обстоит дело для поворотов на очень малые углы $\Delta\varphi$. Путь, проходимый любой точкой тела при очень малом повороте, можно считать прямолинейным (рис. 1.31). Поэтому два совершаемых последовательно малых поворота $\Delta\varphi_1$ и $\Delta\varphi_2$ обусловливают, как видно из рисунка, такое же перемещение $\Delta\mathbf{r}_3 = \Delta\mathbf{r}_1 + \Delta\mathbf{r}_2$ любой точки тела, как и поворот $\Delta\varphi_3$, получаемый из $\Delta\varphi_1$ и $\Delta\varphi_2$ сложением по правилу параллелограмма. Отсюда следует, что очень малые повороты можно рассматривать как векторы (мы будем эти векторы обозначать символами $\Delta\boldsymbol{\varphi}$ или $d\boldsymbol{\varphi}$). Направление вектора поворота связывается с направлением вращения тела. Следовательно, $d\boldsymbol{\varphi}$ является не истинным вектором, а псевдовектором.

Векторная величина

$$\omega = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\varphi}{\Delta t} = \frac{d\varphi}{dt} \qquad (1.93)$$

(где Δt — время, за которое совершается поворот $\Delta\varphi$) называется **угловой скоростью** тела[11]). Угловая скорость ω направлена вдоль оси, вокруг которой вращается тело, в сторону, определяемую правилом правого винта (рис. 1.32), и представляет собой псевдовектор. Модуль угловой скорости равен $d\varphi/dt$. Вращение с постоянной угловой скоростью называется **равномерным**. Если вращение является равномерным, то $\omega = \varphi/t$, где φ — конечный угол поворота за время t (ср. с $v = s/t$). Таким образом, при равномерном вращении ω показывает, на какой угол поворачивается тело за единицу времени.

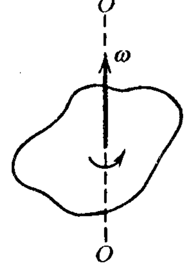


Рис. 1.32

Равномерное вращение можно характеризовать **периодом обращения** T, под которым понимают время, за которое тело делает один оборот, т. е. поворачивается на угол 2π. Поскольку промежутку време-

[11]) Рассмотренную в § 1.3 скорость **v** иногда называют **линейной**.

ни $\Delta t = T$ соответствует угол поворота $\Delta\varphi = 2\pi$, то

$$\omega = 2\pi/T, \tag{1.94}$$

откуда

$$T = 2\pi/\omega. \tag{1.95}$$

Число оборотов в единицу времени ν, очевидно, равно

$$\nu = 1/T = \omega/2\pi. \tag{1.96}$$

Из (1.96) следует, что угловая скорость равна 2π, умноженным на число оборотов в единицу времени:

$$\omega = 2\pi\nu. \tag{1.97}$$

Понятия периода обращения и числа оборотов в единицу времени можно сохранить и для неравномерного вращения, понимая под мгновенным значением T то время, за которое тело совершило бы один оборот, если бы оно вращалось равномерно с данным мгновенным значением угловой скорости, а под ν понимая то число оборотов, которое совершало бы тело за единицу времени при аналогичных условиях.

Вектор $\boldsymbol{\omega}$ может изменяться как за счет изменения скорости вращения тела вокруг оси (в этом случае он изменяется по модулю), так и за счет поворота оси вращения в пространстве (в этом случае $\boldsymbol{\omega}$ изменяется по направлению). Пусть за время Δt вектор ω получает приращение $\Delta\omega$. Изменение вектора угловой скорости со временем характеризуется величиной

$$\beta = \lim_{\Delta t\to 0} \frac{\Delta\omega}{\Delta t} = \frac{d\omega}{dt}, \tag{1.98}$$

которую называют *угловым ускорением*. Угловое ускорение, как и угловая скорость, является псевдовектором.

Отдельные точки вращающегося тела имеют различные линейные скорости $\mathbf{v}$. Скорость каждой из точек непрерывно изменяет свое направление. Модуль скорости v определяется скоростью вращения тела ω и расстоянием R рассматриваемой точки от оси вращения. Пусть за малый промежуток времени тело повернулось на угол $\Delta\varphi$

(рис. 1.33). Точка, находящаяся на расстоянии R от оси, проходит при этом путь $\Delta s = R\Delta\varphi$. Линейная скорость точки равна

$$v = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta s}{\Delta t} = \lim_{\Delta t\to 0} R\frac{\Delta\varphi}{\Delta t} = R\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\varphi}{\Delta t} = R\frac{d\varphi}{dt} = R\omega.$$

Таким образом,

$$v = \omega R. \qquad (1.99)$$

Формула (1.99) связывает модули линейной и угловой скоростей. Найдем выражение, связывающее векторы $\mathbf{v}$ и $\boldsymbol{\omega}$. Положение рассматриваемой точки тела будем определять радиусом-вектором $\mathbf{r}$, проведенным из лежащего на

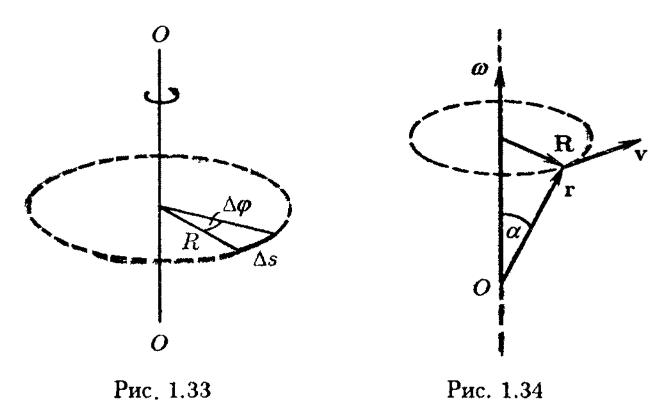


Рис. 1.33 Рис. 1.34

оси вращения начала координат O (рис. 1.34). Из рисунка видно, что векторное произведение $[\boldsymbol{\omega}\mathbf{r}]$ совпадает по направлению с вектором $\mathbf{v}$ и имеет модуль, равный $\omega r\sin\alpha = \omega R$. Следовательно,

$$\mathbf{v} = [\boldsymbol{\omega}\mathbf{r}]. \qquad (1.100)$$

Модуль нормального ускорения точек вращающегося тела равен $|\mathbf{w}_n| = v^2/R$. Подставив сюда значение v из (1.99), получим

$$|\mathbf{w}_n| = \omega^2 R. \qquad (1.101)$$

Если ввести перпендикулярный к оси вращения вектор $\mathbf{R}$, проведенный в данную точку тела (см. рис. 1.34), соотношению (1.101) можно придать векторный вид:

$$\mathbf{w}_n = -\omega^2\mathbf{R}. \qquad (1.102)$$

Минус в этой формуле указывает на то, что векторы $\mathbf{w}_n$ и $\mathbf{R}$ имеют противоположные направления.

Предположим, что ось вращения тела не поворачивается в пространстве. Согласно (1.85) модуль тангенциального ускорения равен $|dv/dt|$. Воспользовавшись соотношением (1.99) и учтя, что расстояние рассматриваемой точки тела от оси вращения $R = \text{const}$, можно написать

$$|\mathbf{w}_\tau| = \left|\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta t}\right| = \left|\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta(\omega R)}{\Delta t}\right| = \\ = \left|\lim_{\Delta t \to 0} R\frac{\Delta \omega}{\Delta t}\right| = R\left|\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \omega}{\Delta t}\right| = R\beta,$$

где β — модуль углового ускорения. Следовательно, модуль тангенциального ускорения связан с модулем углового ускорения соотношением

$$|\mathbf{w}_\tau| = \beta R. \qquad (1.103)$$

Таким образом, нормальное и тангенциальное ускорения растут линейно с увеличением расстояния от точки до оси вращения.

Глава 2

Динамика материальной точки

2.1. Ньютоновская механика

Кинематика дает описание движения тела, не затрагивая вопроса о том, почему тело движется именно так (например, равномерно по окружности или равномерно-ускоренно по прямой), а не иначе.

Динамика изучает движение тел в связи с теми причинами (взаимодействиями между телами), которые обусловливают тот или иной характер движения.

В основе так называемой ньютоновской механики лежат три закона динамики, сформулированные Ньютоном в 1687 г.

Законы Ньютона (как и все остальные физические законы) возникли в результате обобщения большого количества опытных фактов. Правильность их (хотя и для очень обширного, но все же ограниченного круга явлений) подтверждается согласием с опытом тех следствий, которые из них вытекают.

В течение двух столетий ньютоновская механика считалась абсолютно строгой. Однако к концу XIX столетия обнаружились факты, которые не укладывались в рамки этой механики. Оказалось, что с увеличением скорости (до значений, сравнимых со скоростью света) и уменьшением массы тела (до значений порядка массы отдельного атома) наблюдаются все более значительные отклонения от ньютоновской механики. Дальнейшее развитие науки привело к созданию релятивистской механики (механики больших скоростей) и квантовой механики (механики малых масс).

Однако релятивистская механика не привела к полному отрицанию ньютоновской механики. Уравнения релятивистской механики в пределе для скоростей, малых по сравнению со скоростью света, переходят в уравнения ньютоновской механики. Таким образом, ньютоновская

механика вошла в релятивистскую механику как ее частный случай и сохранила свое прежнее значение для описания движения, происходящего со скоростью, много меньшей скорости света.

Аналогично уравнения квантовой механики также дают в пределе (для масс, больших по сравнению с массами атомов) уравнения механики Ньютона. Следовательно, ньютоновская механика вошла и в квантовую механику в качестве ее предельного случая.

Таким образом, развитие науки не перечеркнуло ньютоновскую механику, а лишь показало ее ограниченную применимость. Механика, основывающаяся на законах Ньютона, является механикой тел больших (по сравнению с массой атомов) масс, движущихся с малыми (по сравнению со скоростью света) скоростями. Подробно о границах применимости ньютоновской механики рассказано в § 6.10.

2.2. Инерциальные системы отсчета. Первый закон Ньютона

Мы уже отмечали, что относительно разных систем отсчета движение имеет неодинаковый характер. Например, относительно вагона точка на ободе колеса движется по окружности, в то время как относительно Земли она движется по сложной кривой, называемой *циклоидой*.

Среди всевозможных систем отсчета существуют такие, относительно которых движение тел оказывается особенно простым. В частности, тела, не подверженные воздействию других тел, движутся относительно таких систем без ускорения, т. е. прямолинейно и равномерно. Эти особенные системы отсчета называются *инерциальными*.

Существование инерциальных систем установлено из опыта и представляет собой закон природы. Инерциальных систем существует бесконечное множество. Любая система отсчета, движущаяся относительно некоторой инерциальной системы прямолинейно и равномерно (т. е. с постоянной скоростью), будет также инерциальной. Подробнее об этом будет сказано в § 2.7.

Опытным путем установлено, что система отсчета, центр которой совмещен с Солнцем, а оси направлены на соответствующим образом выбранные звезды, является с очень высокой степенью точности инерциальной.

Она называется гелиоцентрической системой отсчета (гелиос — по-гречески солнце). Любая система отсчета, движущаяся равномерно и прямолинейно относительно гелиоцентрической системы, будет инерциальной.

Земля движется относительно Солнца и звезд по криволинейной траектории, имеющей форму эллипса. Криволинейное движение всегда происходит с некоторым ускорением. Кроме того, Земля совершает вращение вокруг своей оси. По этим причинам система отсчета, связанная с земной поверхностью, движется с ускорением относительно гелиоцентрической системы отсчета и не является инерциальной. Однако ускорение такой системы настолько мало, что в большом числе случаев ее можно считать практически инерциальной. Но иногда неинерциальность системы отсчета, связанной с Землей, оказывает существенное влияние на характер рассматриваемых относительно нее механических явлений. Некоторые из таких случаев мы рассмотрим впоследствии.

Утверждение о существовании инерциальных систем отсчета Ньютон сформулировал в виде закона инерции, который называют также первым законом Ньютона. Согласно этому закону *всякое тело находится в состоянии покоя или равномерного и прямолинейного движения, пока воздействие со стороны других тел не заставит его изменить это состояние.* Оба названных состояния характеризуются тем, что ускорение тела равно нулю. Поэтому формулировке первого закона можно придать вид: скорость любого тела остается постоянной (в частности, равной нулю), пока воздействие на это тело со стороны других тел не вызовет ее изменения.

Закон инерции отнюдь не очевиден. До Галилея[1]) считали, что воздействием обусловливается не изменение скорости (т. е. ускорение), а сама скорость. Это мнение основывалось на таких известных из повседневной жизни фактах, как необходимость непрерывно толкать тележку, движущуюся по горизонтальной ровной дороге, для того чтобы ее движение не замедлялось. Теперь мы знаем, что, толкая тележку, мы уравновешиваем воздействие, оказываемое на нее трением. Однако, не зная об этом, легко прийти к заключению, что воздействие необходимо для поддержания движения неизменным.

[1]) Галилео Галилей (1564–1642) — выдающийся итальянский физик и астроном.

2.3. Масса и импульс тела

Воздействие на данное тело со стороны других тел вызывает изменение его скорости, т. е. сообщает данному телу ускорение. Опыт показывает, что одинаковое воздействие сообщает разным телам разные по модулю ускорения. Всякое тело «противится» попыткам изменить его состояние движения. Это свойство тел называется инертностью. В качестве количественной характеристики инертности используется величина, называемая массой тела.

Чтобы определить массу некоторого тела, нужно сравнить ее с массой тела, принятого за эталон массы. Можно также сравнить массу данного тела с массой некоторого тела с уже известной массой (определенной путем сравнения с эталоном). Операцию сравнения масс m_1 и m_2 двух материальных точек (частиц) можно осуществить следующим образом. Поставим эти частицы в такие условия, чтобы их взаимодействием с другими телами можно было пренебречь. Система тел, взаимодействующих между собой и не взаимодействующих с другими телами, называется замкнутой. Следовательно, мы рассматриваем замкнутую систему двух частиц. Если заставить эти частицы взаимодействовать (например, посредством столкновения друг с другом), их скорости получат приращения $\Delta\mathbf{v}_1$ и $\Delta\mathbf{v}_2$. Опыт дает, что эти приращения всегда противоположны по направлению, т. е. отличаются знаком. Отношение же модулей приращений скоростей не зависит от способа и интенсивности взаимодействия данных двух тел [2]). Это отношение принимается равным обратному отношению масс рассматриваемых тел:

$$\frac{|\Delta\mathbf{v}_1|}{|\Delta\mathbf{v}_2|} = \frac{m_2}{m_1} \tag{2.1}$$

(более инертное тело, т. е. тело с большей массой, претерпевает меньшее изменение скорости). Приняв во внимание относительное направление векторов $\Delta\mathbf{v}_1$ и $\Delta\mathbf{v}_2$, соотношение (2.1) можно записать в виде

$$m_1\Delta\mathbf{v}_1 = -m_2\Delta\mathbf{v}_2. \tag{2.2}$$

[2]) Это справедливо в случае, когда начальные и конечные скорости частиц малы по сравнению со скоростью света c.

В ньютоновской механике (т. е. механике, в основу которой положены законы Ньютона) масса тела предполагается постоянной величиной, не зависящей от скорости тела При скоростях, малых по сравнению со скоростью света c (при $v \ll c$), это предположение практически выполняется. Воспользовавшись постоянством массы, представим равенство (2.2) следующим образом:

$$\Delta(m_1\mathbf{v}_1) = -\Delta(m_2\mathbf{v}_2). \qquad (2.3)$$

Произведение массы тела на его скорость Ньютон назвал количеством движения тела. Это название устарело, и теперь величину

$$\mathbf{p} = m\mathbf{v} \qquad (2.4)$$

называют импульсом тела.

Определение (2.4) справедливо для материальных точек (частиц) и протяженных тел, движущихся поступательно. В случае протяженного тела, движущегося непоступательно, нужно представить тело как совокупность материальных точек с массами Δm_i, определить импульсы $\Delta m_i\mathbf{v}_i$ этих точек и затем сложить эти импульсы векторно. В результате получится полный импульс тела:

$$\mathbf{p} = \sum_i \Delta m_i\mathbf{v}_i. \qquad (2.5)$$

При поступательном движении тела все $\mathbf{v}_i$ одинаковы и формула (2.5) переходит в (2.4).

Заменив в (2.3) произведения $m\mathbf{v}$ импульсами $\mathbf{p}$, придем к соотношению $\Delta\mathbf{p}_1 = -\Delta\mathbf{p}_2$, откуда $\Delta(\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2) = 0$. Равенство нулю приращения величины означает, что сама величина остается неизменной. Таким образом, мы пришли к выводу, что *полный импульс замкнутой системы двух взаимодействующих частиц остается постоянным*:

$$\mathbf{p} = \mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 = \text{const}. \qquad (2.6)$$

Приведенное выше утверждение составляет содержание закона сохранения импульса. В § 3.10 мы рассмотрим этот закон более подробно.

Отметим, что в релятивистской механике (см. гл. 6) выражение для импульса имеет по сравнению с (2.4) более сложный вид:

$$\mathbf{p} = \frac{m\mathbf{v}}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}. \qquad (2.7)$$

Здесь c — скорость света в вакууме, равная $3 \cdot 10^8$ м/с. При $v \ll c$ отношением v^2/c^2 можно пренебречь по сравнению с единицей, в результате формула (2.7) переходит в (2.4).

Мы сначала будем рассматривать ньютоновскую механику, поэтому будем считать импульс равным $m\mathbf{v}$.

2.4. Второй закон Ньютона

Второй закон Ньютона гласит, что *скорость изменения импульса тела равна действующей на тело силе* $\mathbf{F}$:

$$d\mathbf{p}/dt = \mathbf{F}. \tag{2.8}$$

Уравнение (2.8) называется уравнением движения тела.

Заменив согласно (2.4) $\mathbf{p}$ произведением $m\mathbf{v}$ и учтя, что в ньютоновской механике масса предполагается постоянной, можно представить соотношение (2.8) в виде

$$m\mathbf{w} = \mathbf{F}, \tag{2.9}$$

где $\mathbf{w} = \dot{\mathbf{v}}$. Таким образом, мы пришли к другой формулировке второго закона Ньютона: *произведение массы тела на его ускорение равно действующей на тело силе.*

Соотношение (2.9) вызывало и продолжает вызывать среди физиков много споров. До сих пор нет общепринятого истолкования этого соотношения. Сложность состоит в том, что не существует независимых способов определения величин m и $\mathbf{F}$, входящих в уравнение (2.9). Для определения одной из них (m или $\mathbf{F}$) приходится использовать соотношение (2.9), связывающее эту величину с другой и с ускорением $\mathbf{w}$.

Фейнман[3]по поводу смысла второго закона Ньютона говорит следующее: «Спросим же: в чем смысл ... формулы $\mathbf{F} = m\mathbf{w}$? Мы интуитивно понимаем, что такое масса; мы можем также определить ускорение, если нам понятно, что такое место и что такое время. Смысл этих понятий мы поэтому не будем обсуждать, а сосредоточимся на новом понятии силы. И здесь ответ тоже весьма прост: если тело ускоряется, значит, на него действует сила. Так говорят законы Ньютона, и самое точное и красивое из мыслимых определений силы состояло бы в том, что сила есть масса тела, умноженная на его ускорение...». Однако

[3]) Ричард Филлипс Фейнман (1918–1988) — американский физик-теоретик.

«...обнаружив основной закон, утверждающий, что сила есть масса тела, умноженная на ускорение, а потом определив силу как произведение массы на ускорение, мы ничего нового не открываем ... такие высказывания не могут составить содержание физики: зачем же ей гонять определения по кругу... из одного определения никогда ничего никто не выводил... Истинное же содержание законов Ньютона таково: предполагается, что сила обладает *независимыми свойствами* в дополнение к закону $\mathbf{F} = m\mathbf{w}$; но *характерные* независимые свойства сил не описал полностью ни Ньютон, ни кто-нибудь еще...» (Фейнмановские лекции по физике. Вып. 1. М.: — Мир, 1965. С. 209–210).

Подчеркнем, что второй закон Ньютона (так же как и два других его закона) является экспериментальным законом. Он возник в результате обобщения данных опытов и наблюдений.

В частном случае, когда $\mathbf{F} = 0$ (т. е. при отсутствии воздействия на тело со стороны других тел), ускорение, как следует из (2.9), также равно нулю. Этот вывод совпадает с утверждением первого закона Ньютона. Поэтому первый закон входит во второй как его частный случай. Несмотря на это, первый закон формулируется независимо от второго, так как в нем по сути заключен постулат (утверждение) о существовании инерциальных систем отсчета.

В заключение отметим, что при независимом выборе единиц массы, силы и ускорения выражение второго закона нужно писать в виде

$$m\mathbf{w} = k\mathbf{F}, \qquad (2.10)$$

где k — коэффициент пропорциональности.

2.5. Единицы и размерности физических величин

Законы физики, как уже отмечалось, устанавливают количественные соотношения между физическими величинами. Для установления таких соотношений необходимо иметь возможность измерять различные физические величины.

Измерить какую-либо физическую величину (например, скорость) означает сравнить ее с величиной того же вида (во взятом примере — со скоростью), принятой за единицу.

Вообще говоря, для каждой физической величины можно было бы установить ее единицу произвольно, независимо от других. Однако оказывается, что можно ограничиться произвольным выбором единиц для нескольких (минимум трех) в принципе любых величин, принятых за основные. Единицы же всех прочих величин можно установить с помощью основных, воспользовавшись для этой цели физическими законами, связывающими соответствующую величину с основными величинами или с величинами, для которых единицы уже установлены подобным образом.

Поясним сказанное следующим примером. Предположим, что мы уже установили единицы для массы и ускорения. Соотношение (2.10) связывает закономерным образом эти величины с третьей физической величиной — силой. Выберем единицу силы так, чтобы коэффициент пропорциональности в этом уравнении был равен единице. Тогда формула (2.10) принимает более простой вид:

$$m\mathbf{w} = \mathbf{F}. \qquad (2.11)$$

Из (2.11) следует, что установленная единица силы представляет собой такую силу, под действием которой тело с массой, равной единице, получает ускорение, равное также единице (подстановка в (2.11) $F = 1$ и $m = 1$ дает $w = 1$).

При указанном способе выбора единиц физические соотношения принимают более простой вид. Сама же совокупность единиц образует определенную систему.

Существует несколько систем, отличающихся выбором основных единиц. Системы, в основу которых положены единицы длины, массы и времени, называются *абсолютными*.

Принятый в 1981 г. государственный стандарт ГОСТ 8.417—81 (СТ СЭВ 1052—78) ввел как обязательную *Международную систему единиц*, обозначаемую символом СИ. Основными единицами СИ являются: единица длины — метр (сокращенное обозначени — м), единица массы — килограмм (кг) и единица времени — секунда (с). Таким образом, СИ принадлежит к числу абсолютных систем. Кроме указанных трех единиц, СИ принимает в качестве основных единицу силы тока — ампер (А), единицу термодинамической температуры — кельвин (К), единиц) силы света — кандела (кд) и единицу количества вещества — моль (моль). Об этих единицах будет идти речь в соответствующих разделах курса.

В 1983 г. принято новое определение метра, основанное на константе скорости света. Это позволило существенно поднять точность линейных измерений. По новому определению метр представляет собой расстояние, проходимое в вакууме плоской электромагнитной волной за 1/299 792 458 долю секунды. Новое определение метра дано с учетом современных достижений лазерной техники и квантовой электроники. Метр приближенно равен 1/40 000 000 доле длины земного меридиана. Применяются также кратные и дольные единицы: километр (1 км $= 10^3$м), сантиметр (1 см $= 10^{-2}$м), миллиметр (1 мм $= 10^{-3}$м) и т. д.

Килограмм представляет собой массу платино-иридиевого[4]) тела, хранящегося в Международном бюро мер и весов в Севре (близ Парижа). Это тело называется международным прототипом килограмма. Масса прототипа близка к массе 1 000 см^3 чистой воды при 4 °С. Грамм равен 1/1 000 килограмма.

Секунда определяется как промежуток времени, равный сумме 9 192 631 770 периодов излучения, соответствующего переходу между двумя сверхтонкими уровнями основного состояния атома цезия-133. Секунда приблизительно равна 1/86 400 средних солнечных суток.

В физике применяется также абсолютная система единиц, называемая СГС-системой. Основными единицами в этой системе являются сантиметр, грамм и секунда.

Единицы введенных нами в кинематике величин (скорости и ускорения) являются производными от основных единиц. Так, за единицу скорости принимается скорость равномерно движущегося тела, проходящего в единицу времени (секунду) путь, равный единице длины (метру или сантиметру). Обозначение этой единицы — м/с в СИ и см/с в СГС-системе. За единицу ускорения принимается ускорение равномерно-переменного движения, при котором скорость тела за единицу времени (секунду) изменяется на единицу (на 1 м/с или 1 см/с). Обозначение этой единицы — м/с^2 в СИ и см/с^2 в СГС-системе.

---

[4]) Сплав платины с иридием обладает большой твердостью и высокой коррозионной стойкостью (т. е. мало подвержен химическому воздействию окружающей среды).

Единица силы в СИ называется ньютоном (Н). Согласно (2.11) ньютон равен силе, под действием которой тело массой 1 кг получает ускорение 1 м/с^2. Единица силы в СГС-системе называется диной (дин). Одна дина равна силе, под действием которой тело массой 1 г получает ускорение 1 см/с^2. Между ньютоном и диной имеется следующее соотношение:

$$1\ \text{Н} = 1\ \text{кг} \cdot 1\ \text{м/с}^2 = 10^3\ \text{г} \cdot 10^2\ \text{см/с}^2 = 10^5\ \text{дин}.$$

В технике широко применялась система МКГСС (называемая обычно *технической системой единиц*). Основными единицами этой системы являются метр, единица силы — килограмм-сила (кгс) и секунда. Килограмм-сила определяется как сила, сообщающая массе 1 кг ускорение, равное 9,80655 м/с^2. Из этого определения следует, что 1 кгс = 9,80655 Н (приближенно 9,81 Н).

За единицу массы в МКГСС согласно (2.11) должна быть принята масса такого тела, которое под действием силы 1 кгс получает ускорение 1 м/с^2. Эта единица обозначается кгс·с^2/м; специального названия она не имеет. Очевидно, что 1 кгс·с^2/м = 9,80 655 кг (приблизительно 9,81 кг).

Из способа построения систем единиц следует, что изменение основных единиц влечет за собой изменение производных единиц. Если, например, за единицу времени принять вместо секунды минуту, т. е. увеличить единицу времени в 60 раз, то единица скорости уменьшится в 60 раз, а единица ускорения уменьшится в 3 600 раз.

Соотношение, показывающее, как изменяется единица какой-либо величины при изменении основных единиц, называется *размерностью* этой величины. Для обозначения размерности произвольной физической величины используется ее буквенное обозначение, взятое в квадратные скобки. Так, например, символ $[v]$ означает размерность скорости. Для размерностей основных величин используются специальные обозначения: для длины L, для массы M и для времени T. Таким образом, обозначив длину буквой l, массу буквой m и время буквой t, можно написать:

$$[l] = \text{L}, \quad [m] = \text{M}, \quad [t] = \text{T}.$$

В указанных обозначениях размерность произвольной физической величины имеет вид $\text{L}^\alpha \text{M}^\beta \text{T}^\gamma$ (α, β и γ могут

быть как положительными, так и отрицательными; в частности, они могут равняться нулю). Эта запись означает, что при увеличении единицы длины в n_1 раз единица данной величины увеличивается в n_1^α раз (соответственно число, которым выражается значение величины в этих единицах, уменьшается в n_1^α раз), при увеличении единицы массы в n_2 раз единица данной величины увеличивается в n_2^β раз и, наконец, при увеличении единицы времени в n_3 раз единица данной величины увеличивается в n_3^γ раз.

Поскольку физические законы не могут зависеть от выбора единиц фигурирующих в них величин, размерности обеих частей уравнений, выражающих эти законы, должны быть одинаковыми. Это условие может быть использовано, во-первых, для проверки правильности полученных физических соотношений и, во-вторых, для установления размерностей физических величин. Так, например, скорость определяется как $v = \Delta s/\Delta t$. Размерность Δs равна L, размерность Δt равна T. Размерность правой части написанного соотношения равна $[\Delta s][\Delta t] = \mathrm{L}/\mathrm{T} = \mathrm{LT}^{-1}$. Размерность левой части должна быть такой же. Следовательно,

$$[v] = LT^{-1}. \tag{2.12}$$

Написанное соотношение называется формулой размерности, а его правая часть — размерностью соответствующей величины (в данном случае скорости).

На основании соотношения $w = \Delta v/\Delta t$ можно установить размерность ускорения:

$$[w] = \frac{[\Delta v]}{[\Delta t]} = \frac{\mathrm{LT}^{-1}}{\mathrm{T}} = \mathrm{LT}^{-2}.$$

Размерность силы

$$[F] = [m][w] = \mathrm{MLT}^{-2}.$$

Аналогично устанавливаются размерности всех прочих величин.

2.6. Третий закон Ньютона

Всякое действие тел друг на друга носит характер взаимодействия: если тело *1* действует на тело *2* с силой $\mathbf{F}_{21}$, то и тело *2* в свою очередь действует на тело *1* с силой $\mathbf{F}_{12}$.

Третий закон Ньютона утверждает, что *силы, с которыми действуют друг на друга взаимодействующие тела, равны по модулю и противоположны по направлению.* Используя приведенные выше обозначения сил, содержание третьего закона можно представить в виде равенства

$$\mathbf{F}_{12} = -\mathbf{F}_{21}. \tag{2.13}$$

Из третьего закона Ньютона вытекает, что силы возникают попарно: всякой силе, приложенной к какому-то телу, можно сопоставить равную ей по модулю и противоположно направленную силу, приложенную к другому телу, взаимодействующему с данным.

Третий закон Ньютона бывает справедлив не всегда. Он выполняется вполне строго в случае контактных взаимодействий (т. е. взаимодействий, наблюдающихся при непосредственном соприкосновении тел), а также при взаимодействии находящихся на некотором расстоянии друг от друга *покоящихся тел.*

В качестве примера нарушения третьего закона Ньютона может служить система из двух заряженных частиц e_1 и e_2, движущихся в рассматриваемый момент так, как показано на рис. 2.1. В электродинамике доказывается, что, кроме подчиняющейся третьему закону силы электростатического взаимодействия $\mathbf{F}_{12}$, на первую частицу будет действовать магнитная сила $\mathbf{F}_1$. На вторую же частицу действует лишь сила $\mathbf{F}_{21}$, равная $-\mathbf{F}_{12}$. Магнитная сила, действующая на вторую частицу, для изображенного на рисунке случая равна нулю. Отметим, что при скоростях частиц, много меньших скорости света в пустоте (при $v_1 \ll c$ и $v_2 \ll c$), сила $\mathbf{F}_1$ пренебрежимо мала по сравнению с силой $\mathbf{F}_{12}$, так что третий закон Ньютона оказывается практически справедливым и в этом случае.

Теперь рассмотрим систему из двух электрически нейтральных частиц m_1 и m_2, удаленных друг от друга на расстояние r. Вследствие всемирного тяготения эти частицы притягивают друг друга с силой

$$F = \gamma \frac{m_1 m_2}{r^2}. \tag{2.14}$$

В данном случае взаимодействие частиц осуществляется через гравитационное поле. Скажем, первая частица создает в окружающем ее пространстве поле, которое проявляет себя в том, что на помещенную в какую-либо

точку этого поля частицу m_2 действует сила притяжения к первой частице. Аналогично вторая частица создает поле, которое проявляет себя в действии на первую частицу. Опыт дает, что изменения поля, обусловленные, например, изменением положения создающей поле частицы, распространяются в пространстве не мгновенно, а хотя и с очень большой, но конечной скоростью, равной скорости света в пустоте c.

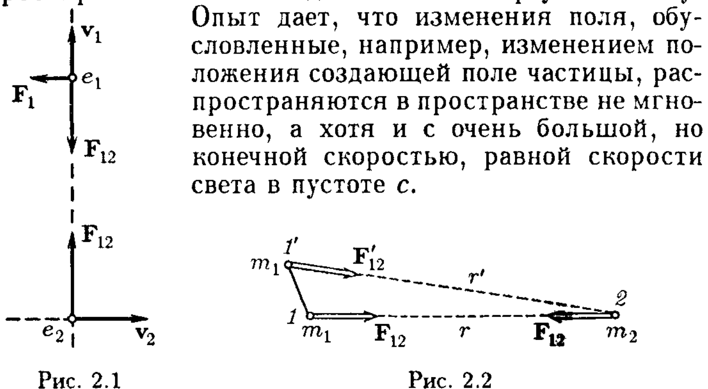


Рис. 2.1 Рис. 2.2

Предположим, что первоначально частицы m_1 и m_2 покоятся в положениях *1* и *2* (рис. 2.2). Силы взаимодействия $\mathbf{F}_{12}$ и $\mathbf{F}_{21}$ равны по модулю и противоположны по направлению. Теперь пусть частица m_1 очень быстро (со скоростью, почти равной c) сместится в положение *1′*. В этой точке на частицу m_1 будет действовать сила $\mathbf{F}'_{12}$, меньшая по модулю ($r' > r$) и иначе направленная, чем $\mathbf{F}_{12}$ (напомним, что поле частицы m_2 остается неизменным). На вторую же частицу, пока возмущение поля, вызванное смещением m_1, не достигнет точки *2*, будет продолжать действовать сила $\mathbf{F}_{21}$. Следовательно, пока двигалась частица m_1 и в течение некоторого времени после того, как она остановилась в точке *1′*, третий закон Ньютона был нарушен.

Если бы частица m_1 перемещалась из точки *1* в точку *1′* со скоростью v, много меньшей c ($v \ll c$), или скорость распространения возмущений поля была бесконечно большой, то мгновенные значения поля в точке *2* отвечали бы положениям частицы m_1 в тот же момент времени и, следовательно, нарушений третьего закона не наблюдалось бы.

Ньютоновская механика вообще справедлива лишь для скоростей движения, много меньших скорости света (при $v \ll c$). Поэтому в рамках этой механики скорость распространения возмущений поля считается бесконечной, а третий закон Ньютона — выполняющимся всегда.

2.7. Принцип относительности Галилея

Рассмотрим две системы отсчета, движущиеся относительно друг друга с постоянной скоростью $\mathbf{v}_0$. Одну из этих систем, обозначенную на рис. 2.3 буквой K, будем условно считать неподвижной. Тогда вторая система K' будет двигаться прямолинейно и равномерно. Выберем координатные оси x, y, z системы K и оси x', y', z' системы K' так, чтобы оси x и x' совпадали, а оси y и y', а также z и z' были параллельны друг другу.

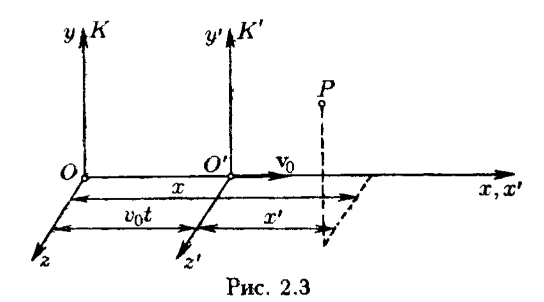


Рис. 2.3

Найдем связь между координатами x, y, z некоторой точки P в системе K и координатами x', y', z' той же точки в системе K'. Если начать отсчет времени с того момента, когда начала координат обеих систем совпадали, то, как следует из рис. 2.3, $x = x' + v_0 t$. Кроме того, очевидно, что $y = y'$ и $z = z'$. Добавив к этим соотношениям принятое в ньютоновской механике предположение, что время в обеих системах течет одинаковым образом, т. е. что $t = t'$, получим совокупность четырех уравнений:

$$x = x' + v_0 t', \quad y = y', \quad z = z', \quad t = t', \tag{2.15}$$

называемых **преобразованиями Галилея**.

Первое и последнее из соотношений (2.15) оказываются справедливыми лишь при значениях v_0, малых по сравнению со скоростью света в вакууме c ($v_0 \ll c$). При v_0, сравнимых с c, преобразования Галилея должны быть заменены более общими преобразованиями Лоренца (см. § 6.2). В рамках ньютоновской механики формулы (2.15) оказываются справедливыми с большой степенью точности.

Продифференцировав соотношения (2.15) по времени, найдем связь между скоростями точки P по отношению к системам отсчета K и K':

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \dot{x}' + v_0 \quad \text{или} \quad v_x = v'_x + v_0, \\ \dot{y} &= \dot{y}' \quad \text{или} \quad v_y = v'_y, \\ \dot{z} &= \dot{z}' \quad \text{или} \quad v_z = v'_z. \end{aligned} \tag{2.16}$$

Три скалярных соотношения (2.16) эквивалентны следующему соотношению между вектором скорости $\mathbf{v}$ по отношению к системе K и вектором скорости $\mathbf{v}'$ по отношению к системе K':

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}' + \mathbf{v}_0. \tag{2.17}$$

Чтобы убедиться в этом, достаточно спроецировать векторное равенство (2.17) на оси x, y, z.

Формулы (2.16) и (2.17) дают правило сложения скоростей в ньютоновской механике. Следует иметь в виду, что соотношение (2.17), как и любое другое векторное соотношение, остается справедливым при произвольном выборе взаимных направлений координатных осей систем K и K'. Соотношения же (2.16) выполняются только при выборе осей, показанном на рис. 2.3.

В § 2.2 отмечалось, что любая система отсчета, движущаяся относительно некоторой инерциальной системы с постоянной скоростью, будет также инерциальной. Теперь мы имеем возможность доказать это утверждение. Для этого продифференцируем по времени соотношение (2.17). Учтя, что $\mathbf{v}_0$ постоянна, получим

$$\dot{\mathbf{v}} = \dot{\mathbf{v}}' \quad \text{или} \quad \mathbf{w} = \mathbf{w}'. \tag{2.18}$$

Отсюда следует, что ускорение какого-либо тела во всех системах отсчета, движущихся относительно друг друга прямолинейно и равномерно, оказывается одним и тем же. Поэтому если одна из этих систем инерциальна (это значит, что при отсутствии сил $\mathbf{w} = 0$), то и остальные будут инерциальными ($\mathbf{w}'$ также равно нулю).

Сила $\mathbf{F}$, действующая на частицу в системе K, совпадает с силой $\mathbf{F}'$, действующей на частицу в системе K': $\mathbf{F} = \mathbf{F}'$. Это следует из того, что сила зависит от расстояний между данной частицей и действующими на нее частицами (и, возможно, от относительных скоростей частиц), а эти расстояния (и скорости) полагаются в нью-

тоновской механике одинаковыми во всех инерциальных системах. Масса также одинакова во всех системах.

Из всего сказанного следует вывод, что *уравнения динамики не изменяются при переходе от одной инерциальной системы отсчета к другой*, т. е., как говорят, инвариантны по отношению к преобразованию координат, соответствующему переходу от одной инерциальной системы отсчета к другой. С механической точки зрения все инерциальные системы отсчета совершенно эквивалентны: ни одной из них нельзя отдать предпочтение перед другими. Практически это проявляется в том, что никакими механическими опытами, проведенными в пределах данной системы отсчета, нельзя установить, находится ли она в состоянии покоя или в состоянии равномерного и прямолинейного движения. Находясь, например, в вагоне поезда, движущегося без толчков прямолинейно и равномерно, мы, не выглянув в окно, не сможем определить, движется вагон или покоится. Свободное падение тел, движение брошенных нами тел и все другие механические процессы будут в этом случае происходить так же, как и в случае, если бы вагон был неподвижен.

Указанные обстоятельства были выяснены еще Галилеем. Положение о том, что все механические явления в различных инерциальных системах отсчета протекают одинаковым образом, вследствие чего никакими механическими опытами невозможно установить, покоится данная система отсчета или движется прямолинейно и равномерно, носит название принципа относительности Галилея.

2.8. Силы

В современной физике различают четыре вида взаимодействий: 1) гравитационное (или взаимодействие, обусловленное всемирным тяготением), 2) электромагнитное (осуществляемое через электрические и магнитные поля), 3) сильное или ядерное (обеспечивающее связь частиц в атомном ядре) и 4) слабое (ответственное за многие процессы распада элементарных частиц).

В рамках классической механики имеют дело с гравитационными и электромагнитными силами, а также с упругими силами и силами трения. Два последних вида сил определяются характером взаимодействия между молекулами вещества. Силы взаимодействия между молеку-

лами имеют электромагнитное происхождение. Следовательно, упругие силы и силы трения являются по своей природе электромагнитными.

Гравитационные и электромагнитные силы являются фундаментальными — их нельзя свести к другим, более простым, силам. Упругие же силы и силы трения не являются фундаментальными.

Законы фундаментальных сил чрезвычайно просты. Гравитационная сила определяется формулой (2.14). Сила, с которой взаимодействуют два покоящихся точечных заряда q_1 и q_2, дается законом Кулона:

$$F = k\frac{q_1 q_2}{r^2} \tag{2.19}$$

(k — коэффициент пропорциональности, зависящий от выбора единиц входящих в формулу величин).

Если заряды движутся, то, кроме силы (2.19), на них действуют магнитные силы. Магнитная сила, действующая на точечный заряд q, движущийся со скоростью $\mathbf{v}$ в магнитном поле с индукцией $\mathbf{B}$, определяется формулой

$$\mathbf{F} = k'q[\mathbf{vB}] \tag{2.20}$$

(k' — коэффициент пропорциональности).

Формулы (2.14), (2.19) и (2.20) являются точными. Для упругих сил и сил трения можно получить лишь приближенные эмпирические формулы, которые рассматриваются в следующих параграфах.

2.9. Упругие силы

Всякое реальное тело под действием приложенных к нему сил деформируется, т. е. изменяет свои размеры и форму. Если после прекращения действия сил тело принимает первоначальные размеры и форму, деформация называется *упругой*. Упругие деформации наблюдаются в том случае, если сила, обусловившая деформацию, не превосходит некоторый. определенный для каждого конкретного тела предел (предел упругости).

Возьмем пружину, имеющую в недеформированном состоянии длину l_0 и приложим к ее концам равные по модулю, противоположно направленные силы $\mathbf{F}_1$ и $\mathbf{F}_2$

(рис. 2.4). Под действием этих сил пружина растянется на некоторую величину Δl, после чего наступит равновесие. В состоянии равновесия внешние силы $\mathbf{F}_1$ и $\mathbf{F}_2$ будут уравновешены упругими силами, возникшими в пружине в результате деформации. Опыт дает, что при небольших деформациях удлинение пружины Δl оказывается пропорциональным растягивающей силе: $\Delta l \sim F$ $(F = F_1 = F_2)$. Соответственно упругая сила оказывается пропорциональной удлинению пружины:

$$F = k\Delta l. \tag{2.21}$$

Коэффициент пропорциональности k называется **жесткостью пружины**.

Утверждение о пропорциональности между упругой силой и деформацией носит название **закона Гука**[5].

Упругие натяжения возникают во всей пружине. Любая часть пружины действует на другую часть с силой, определяемой формулой (2.21). Поэтому, если разрезать пружину пополам, та же по модулю упругая сила будет возникать в каждой из половин при удлинении, в два раза меньшем. Отсюда следует, что при заданных материале пружины и размерах витка упругая сила определяется не абсолютным удлинением пружины Δl, а относительным удлинением $\Delta l / l_0$.

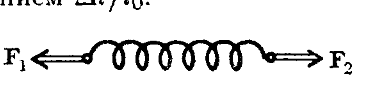
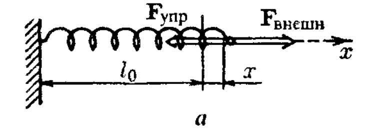


Рис. 2.4



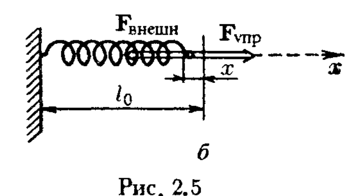


Рис. 2.5

При сжатии пружины также возникают упругие натяжения, но другого знака. Обобщим формулу (2.21) следующим образом. Закрепим один конец пружины неподвижно (рис. 2.5), а удлинение пружины будем рассматривать как координату x другого конца, отсчитываемую от его положения, отвечающего недеформированной пружине[6]. Кроме того, обозначим проекцию упругой силы

[5] Роберт Гук (1635–1703) — английский физик.

[6] На рис. 2.5 *б* длина отрезка, на который сместился конец пружины, обозначена буквой x; это вызвано тем, что длина отрезка — положительная величина, координата же x в этом случае отрицательна.

$\mathbf{F}_{упр}$ на ось x через F_x. Тогда можно написать, что

$$F_x = -kx \tag{2.22}$$

(из рис. 2.5 видно, что проекция упругой силы на ось x и координата x всегда имеют разные знаки).

Однородные стержни ведут себя при растяжении или одностороннем сжатии подобно пружине. Если к концам стержня приложить направленные вдоль его оси силы $\mathbf{F}_1$ и $\mathbf{F}_2$ ($F_1 = F_2 = F$), действие которых равномерно распределено по всему сечению, то длина стержня l_0 получит положительное (при растяжении) либо отрицательное (при сжатии) приращение[7] Δl (рис. 2.6). В качестве

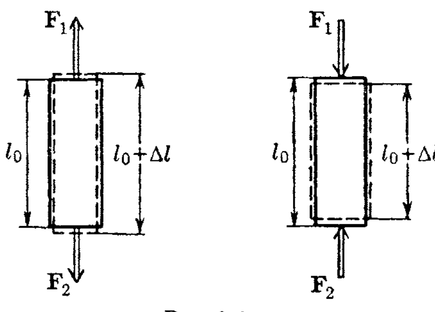


Рис. 2.6

величины, характеризующей деформацию стержня, естественно взять относительное изменение его длины:

$$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l_0}. \tag{2.23}$$

Опыт дает, что для стержней из данного материала относительное удлинение при упругой деформации пропорционально силе, приходящейся на единицу площади поперечного сечения стержня:

$$\varepsilon = \alpha \frac{F}{S} \tag{2.24}$$

(α — коэффициент пропорциональности).

[7]) Изменение длины стержня сопровождается соответствующим изменением поперечных размеров стержня.

Величина, равная отношению силы к площади поверхности, на которую действует сила, называется напряжением. Благодаря взаимодействию частей тела друг с другом напряжение передается во все точки тела — весь объем стержня оказывается в напряженном состоянии. Если сила направлена по нормали к поверхности, напряжение называется нормальным. Если сила направлена по касательной к поверхности, на которую она действует, напряжение называется тангенциальным. Нормальное напряжение принято обозначать буквой σ, тангенциальное — буквой τ.

Отношение F/S в формуле (2.24) представляет собой нормальное напряжение σ. Следовательно, этой формуле можно придать вид

$$\varepsilon = \alpha\sigma. \tag{2.25}$$

Для характеристики упругих свойств материала пользуются величиной $E = 1/\alpha$, которая называется модулем Юнга[8]. Измеряется эта величина в паскалях[9] (1 Па $=$ 1 Н/м^2).

Заменив в (2.25) α на E, получим соотношение

$$\varepsilon = \sigma/E, \tag{2.26}$$

из которого следует, что модуль Юнга равен такому нормальному напряжению, при котором относительное удлинение было бы равно единице (т. е. приращение длины Δl было бы равно первоначальной длине l_0), если бы столь большие упругие деформации были возможны (в действительности при значительно меньших напряжениях происходит разрушение стержня, еще раньше достигается предел упругости).

Решив уравнение (2.24) относительно F и заменив ε на $\Delta l/l_0$, а α на $1/E$, получим формулу

$$F = \frac{ES}{l_0}\Delta l = k\Delta l, \tag{2.27}$$

где k — постоянный для данного стержня коэффициент. Соотношение (2.27) выражает закон Гука для стержня (ср. с (2.22)). Напомним, что этот закон выполняется только до тех пор, пока не достигается предел упругости.

[8]) В честь английского ученого Томаса Юнга (1773–1829).

[9]) В честь французского ученого Блеза Паскаля (1623–1662).

В заключение рассмотрим кратко деформацию сдвига. Возьмем однородное тело, имеющее форму прямоугольного параллелепипеда, и приложим к его противолежащим граням силы $\mathbf{F}_1$ и $\mathbf{F}_2$ ($F_1 = F_2 = F$), направленные параллельно этим граням (рис. 2.7). Если действие сил будет равномерно распределено по всей поверхности соответствующей грани, то в любом сечении, параллельном этим граням, возникнет тангенциальное напряжение

$$\tau = F/S \qquad (2.28)$$

Рис. 2.7

(S — площадь грани). Под действием напряжений тело деформируется так, что одна грань сместится относительно другой на некоторое расстояние a. Если тело мысленно разбить на элементарные, параллельные рассматриваемым граням слои, то каждый слой окажется сдвинутым относительно соседних с ним слоев. По этой причине деформация такого вида получила название «сдвиг».

При деформации сдвига любая прямая, первоначально перпендикулярная к слоям, повернется на некоторый угол φ. В качестве характеристики деформации сдвига берется величина

$$\gamma = \frac{a}{b} = \operatorname{tg}\varphi, \qquad (2.29)$$

называемая **относительным сдвигом** (смысл величин a и b ясен из рис. 2.7). При упругих деформациях угол φ бывает очень мал. Поэтому можно положить $\operatorname{tg}\varphi \approx \varphi$. Следовательно, относительный сдвиг γ оказывается равным углу сдвига φ.

Опыт показывает, что относительный сдвиг пропорционален тангенциальному напряжению:

$$\gamma = \frac{1}{G}\tau. \qquad (2.30)$$

Коэффициент G зависит только от свойств материала и называется **модулем сдвига**. Он равен такому тангенциальному напряжению, при котором угол сдвига оказался бы равным 45° ($\operatorname{tg}\varphi = 1$), если бы при столь больших деформациях не был превзойден предел упругости. Измеряется G, как и E, в паскалях (Па).

2.10. Силы трения

Силы трения появляются при перемещении соприкасающихся тел или их частей относительно друг друга. Трение, возникающее при относительном перемещении двух соприкасающихся тел, называется внешним; трение между частями одного и того же сплошного тела (например, жидкости или газа) носит название внутреннего трения.

Силу трения, возникающую при движении твердого тела относительно жидкой или газообразной среды, следует отнести к категории сил внутреннего трения, поскольку в этом случае слои среды, непосредственно соприкасающиеся с телом, вовлекаются им в движение с той же скоростью, какую имеет тело, и на движение тела оказывает влияние трение между этими и внешними по отношению к ним слоями среды.

Трение между поверхностями двух твердых тел при отсутствии какой-либо прослойки, например смазки между ними, называется сухим. Трение между твердым телом и жидкой или газообразной средой, а также между слоями такой среды называется вязким (или жидким).

Применительно к сухому трению различают трение скольжения и трение качения.

Силы трения направлены по касательной к трущимся поверхностям (или слоям), причем так, что они противодействуют относительному смещению этих поверхностей (слоев). Если, например, два слоя жидкости скользят один по другому, двигаясь с различной скоростью, то сила, приложенная к более быстро движущемуся слою, направлена в сторону, противоположную движению, а сила, действующая на слой, движущийся медленнее, направлена в сторону движения слоя.

Сухое трение. В случае сухого трения сила трения возникает не только при скольжении одной поверхности по другой, но также и при попытках вызвать такое скольжение. В последнем случае она называется силой трения покоя. Рассмотрим два соприкасающихся тела *1* и *2*, из которых последнее закреплено неподвижно (рис. 2.8). Тело *1* прижимается к телу *2* с силой $\mathbf{F}_n$, направленной по нормали к поверхности соприкосновения тел. Она называется силой нормального давления и может быть обусловлена весом тела или другими причинами. Попыта-

емся переместить тело *1*, подействовав на него внешней силой **F**. При этом обнаружится, что для каждой конкретной пары тел и каждого значения силы нормального давления имеется определенное минимальное значение F_0 силы **F**, при котором тело *1* удается сдвинуть с места. При значениях внешней силы, заключенных в пределах $0 < F < F_0$, тело остается в покое. По второму закону Ньютона это возможно в том случае, если сила **F** уравновешивается равной ей по модулю и противоположно направленной силой, которая и есть сила трения покоя $\mathbf{F}_{тр}$. Она автоматически [10])принимает значение, равное значению внешней силы F (при условии, что последняя не превосходит F_0). Сила F_0 представляет собой наибольшую силу трения покоя.

Отметим, что в соответствии с третьим законом Ньютона на тело *2* также действует сила трения покоя $\mathbf{F}'_{тр}$ (на рис. 2.8 она показана штриховой стрелкой), равная по модулю силе $\mathbf{F}_{тр}$, но имеющая противоположное ей направление.

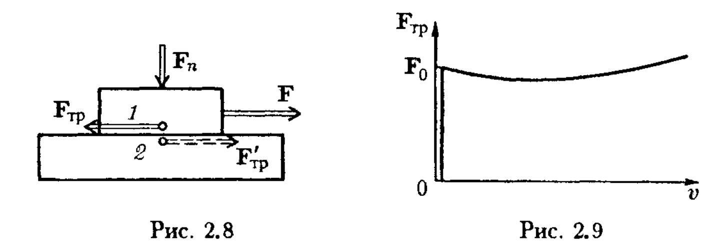


Рис. 2.8 Рис. 2.9

Если внешняя сила **F** превзойдет по модулю F_0, тело начинает скользить, причем его ускорение определяется результирующей двух сил: внешней **F** и силы трения скольжения $\mathbf{F}_{тр}$, которая в той или иной мере зависит от скорости скольжения. Характер этой зависимости определяется природой и состоянием трущихся поверхностей. Чаще всего встречающийся вид зависимости силы трения от скорости показан на рис. 2.9. График охватывает как случай покоя, так и случай скольжения. Сила трения покоя, как уже отмечалось, может иметь значения от нуля до F_0, что отражено на графике вертикальным отрезком.

[10]) Это происходит подобно тому, как пружина под действием растягивающей силы автоматически приобретает такое удлинение, при котором упругая сила уравновешивает внешнюю силу.

В соответствии с рис. 2.9 сила трения скольжения с увеличением скорости вначале несколько убывает, а затем начинает возрастать.

При специальной обработке соприкасающихся поверхностей сила трения скольжения может оказаться практически не зависящей от скорости. В этом случае криволинейный участок графика на рис. 2.9 превращается в отрезок горизонтальной прямой, начинающейся в точке F_0.

Законы сухого трения сводятся к следующему: максимальная сила трения покоя, а также сила трения скольжения не зависят от площади соприкосновения трущихся тел и оказываются приблизительно пропорциональными силе нормального давления, прижимающей трущиеся поверхности друг к другу:

$$F_{\text{тр}} = kF_n. \tag{2.31}$$

Безразмерный коэффициент пропорциональности k называется *коэффициентом трения* (соответственно покоя или скольжения). Он зависит от природы и состояния трущихся поверхностей, в частности от их шероховатости. В случае скольжения коэффициент трения является функцией скорости.

Силы трения играют очень большую роль в природе. В нашей повседневной жизни трение нередко оказывается полезным. Вспомним огромные затруднения, которые испытывают пешеходы и транспорт во время гололедицы, когда трение между покрытием дороги и подошвами пешеходов или колесами транспорта значительно уменьшается. Не будь сил трения, мебель пришлось бы прикреплять к полу, как на судне во время качки, ибо она при малейшей негоризонтальности пола сползала бы в направлении покатости.

Во многих случаях роль трения крайне отрицательна, и приходится принимать меры к тому, чтобы по возможности его ослабить. Так обстоит, например, дело с трением в подшипниках или с трением между втулкой колеса и осью.

Наиболее радикальным способом уменьшения сил трения является замена трения скольжения трением качения, которое возникает, например, между цилиндрическим или шарообразным телом и поверхностью, по которой оно катится. Трение качения подчиняется формально тем же законам, что и трение скольжения, но коэффициент трения в этом случае оказывается значительно меньшим.

Вязкое трение и сопротивление среды. В отличие от сухого вязкое трение характерно тем, что сила вязкого трения обращается в нуль одновременно со скоростью. Поэтому, как бы ни была мала внешняя сила, она может сообщить относительную скорость слоям вязкой среды. Законы, которым подчиняются силы трения между слоями среды, будут рассмотрены в главе, посвященной механике жидкостей.

В этом параграфе мы ограничимся рассмотрением сил трения между твердым телом и вязкой (жидкой или газообразной) средой. Следует иметь в виду, что, помимо собственно сил трения, при движении тел в жидкой или газообразной среде возникают так называемые силы сопротивления среды, которые могут быть гораздо значительнее, чем силы трения. Не имея возможности рассматривать подробно причины возникновения этих сил, мы ограничимся изложением закономерностей, которым подчиняются силы трения и сопротивления среды совместно, причем условно будем называть суммарную силу силой трения. Зависимость этой силы от скорости показана на рис. 2.10.

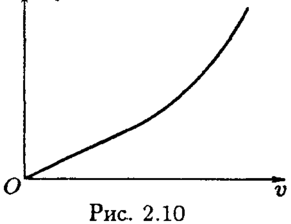


Рис. 2.10

При небольших скоростях сила растет линейно со скоростью:

$$\mathbf{F}_{тр} = -k_1\mathbf{v} \tag{2.32}$$

(знак минус означает, что эта сила направлена противоположно скорости). Значение коэффициента k_1 зависит от формы и размеров тела, состояния его поверхности и от свойства среды, называемого вязкостью. Например, для глицерина этот коэффициент оказывается гораздо большим, чем для воды.

При больших скоростях линейный закон переходит в квадратичный, т. е. сила начинает расти пропорционально квадрату скорости:

$$\mathbf{F}_{тр} = -k_2 v^2 \mathbf{e}_v \tag{2.33}$$

($\mathbf{e}_v$ — орт скорости). Значение коэффициента k_2 зависит от размеров и формы тела.

Значение скорости, при котором закон (2.32) переходит в (2.33), зависит от формы и размеров тела, а также от вязких свойств и плотности среды.

2.11. Сила тяжести и вес

Под действием силы притяжения к Земле все тела падают с одинаковым относительно поверхности Земли ускорением, которое принято обозначать буквой $\mathbf{g}$. Это означает, что в системе отсчета, связанной с Землей, на всякое тело массы m действует сила

$$\mathbf{P} = m\mathbf{g}, \tag{2.34}$$

называемая силой тяжести. Она приблизительно равна силе гравитационного притяжения тела к Земле. Различие между силой тяжести и гравитационной силой обусловлено тем, что система отсчета, связанная с Землей, не вполне инерциальна (подробнее об этом идет речь в §4.2). Это различие настолько мало (оно не превышает 0,36%), что в первом приближении силу тяжести можно считать равной силе, с которой тело притягивается к Земле.

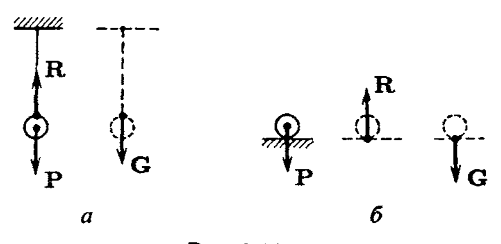


Рис. 2.11

Если подвесить тело (рис. 2.11 *а*) или положить на опору (рис. 2.11 *б*), оно будет покоиться относительно Земли. В этом случае сила тяжести уравновешивается силой $\mathbf{R}$, которую называют реакцией подвеса или опоры. (Реакциями называются силы, с которыми на данное тело действуют тела, ограничивающие его движение.) По третьему закону Ньютона тело действует на подвес или опору с силой $\mathbf{G}$, которую называют весом тела.

Итак, *вес тела — это сила, с которой тело действует на подвес или опору вследствие гравитационного притяжения к Земле.*

Поскольку силы $\mathbf{P}$ и $\mathbf{R}$ (см. рис. 2.11) уравновешивают друг друга, выполняется соотношение $\mathbf{P} = -\mathbf{R}$ Вес $\mathbf{G}$ есть сила, с которой тело действует на подвес (или опору);

$\mathbf{R}$ есть сила, с которой подвес (или опора) действует на тело. Согласно третьему закону Ньютона должно выполняться соотношение $\mathbf{G} = -\mathbf{R}$ Сравнение обоих соотношений приводит к выражению

$$\mathbf{G} = \mathbf{P} = m\mathbf{g}. \tag{2.35}$$

Таким образом, вес $\mathbf{G}$ и сила тяжести $\mathbf{P}$ равны друг другу.

Вес равен $m\mathbf{g}$ только в том случае, если тело и подвес (или опора) неподвижны относительно Земли В случае их движения с некоторым ускорением $\mathbf{w}$ вес $\mathbf{G}$ не будет равен $m\mathbf{g}$. Это можно уяснить на следующем примере.

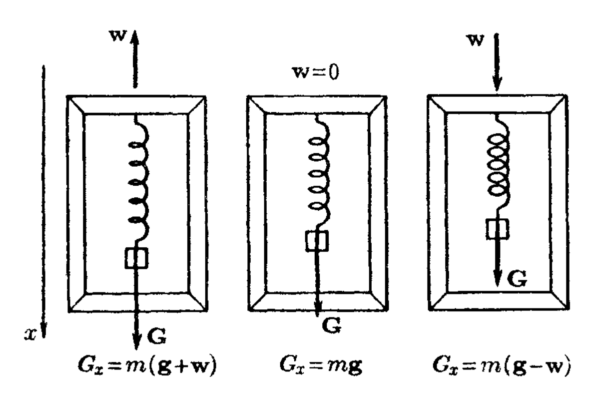


Рис. 2.12

Пусть подвес в виде укрепленной на рамке пружины движется вместе с телом с ускорением $\mathbf{w}$ (рис. 2.12). Тогда уравнение движения тела будет иметь вид

$$\mathbf{P} + \mathbf{R} = m\mathbf{w}, \tag{2.36}$$

где $\mathbf{R}$ — реакция подвеса, т. е. сила, с которой пружина действует на тело. По третьему закону Ньютона тело действует на пружину с силой $-\mathbf{R}$, которая по определению представляет собой вес тела $\mathbf{G}$ в этих условиях. Заменив в (2.36) $\mathbf{R}$ на $-\mathbf{G}$, а силу тяжести $\mathbf{P}$ произведением $m\mathbf{g}$, получим

$$\mathbf{G} = m(\mathbf{g} - \mathbf{w}). \tag{2.37}$$

Формула (2.37) определяет вес тела в общем случае. Она справедлива для подвеса или опоры любого вида.

Предположим, что тело и подвес движутся в вертикальном направлении (в этом предположении выполнен рис. 2.12).

Спроецируем (2.37) на направление отвеса:

$$G = m(g \pm w). \qquad (2.38)$$

В этом выражении G, g и w суть модули соответствующих векторов. Знак «+» соответствует $\mathbf{w}$, направленному вверх, знак «−» соответствует направлению $\mathbf{w}$ вниз.

Из формулы (2.38) вытекает, что по модулю вес $\mathbf{G}$ может быть как больше, так и меньше, чем сила тяжести $\mathbf{P}$. При свободном падении рамки с подвесом $\mathbf{w} = \mathbf{g}$ и сила $\mathbf{G}$, с которой тело действует на подвес, равна нулю. Наступает состояние невесомости. Космический корабль, летящий вокруг Земли с выключенными двигателями, движется, как и свободно падающая рамка, с ускорением $\mathbf{g}$, вследствие чего тела внутри корабля находятся в состоянии невесомости: они не оказывают давления на соприкасающиеся с ними тела.

Отметим, что часто путают силу тяжести $\mathbf{P}$ и вес тела $\mathbf{G}$. Это обусловлено тем, что в случае неподвижной опоры силы $\mathbf{P}$ и $\mathbf{G}$ совпадают по модулю и направлению (обе они равны $m\mathbf{g}$). Однако следует помнить, что эти силы приложены к разным телам: $\mathbf{P}$ приложена к самому телу, $\mathbf{G}$ — к подвесу или опоре, ограничивающим свободное движение тела в поле сил земного тяготения. Кроме того, сила $\mathbf{P}$ всегда равна $m\mathbf{g}$ независимо от того, движется тело или покоится; сила же веса $\mathbf{G}$ зависит от ускорения, с которым движутся опора и тело, причем она может быть как больше, так и меньше $m\mathbf{g}$; в частности, в состоянии невесомости она обращается в нуль.

Соотношение (2.35) между массой и весом тела дает способ сравнения масс тел путем взвешивания: отношение весов тел, определенных в одинаковых условиях (обычно при $\mathbf{w} = 0$) в одной и той же точке земной поверхности, равно отношению масс этих тел:

$$G_1 : G_2 : G_3 : \ldots = m_1 : m_2 : m_3 : \ldots$$

Как будет показано в § 4.2, ускорение свободного падения g и сила тяжести P зависят от географической широты местности. Кроме того, P и g зависят также от высоты над уровнем моря: с удалением от центра Земли они уменьшаются.

2.12. Практическое применение законов Ньютона

Для того чтобы составить уравнение движения, нужно прежде всего установить, какие силы действуют на рассматриваемое тело. При этом необходимо выяснить, действие каких других тел на данное тело следует принять во внимание. Так, например, для тела, сползающего по наклонной плоскости (рис. 2.13), существенно воздействие со стороны Земли (оно характеризуется силой $m\mathbf{g}$) и воздействие со стороны плоскости (оно характеризуется силой реакции $\mathbf{F}_r$).

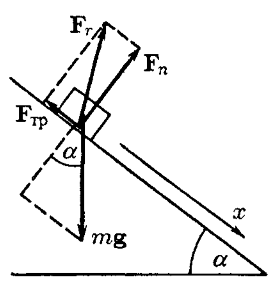


Рис. 2.13

Ни в коем случае не следует вводить в рассмотрение «движущие», «скатывающие», «центростремительные», «центробежные»[11]) и тому подобные силы. Чтобы не впасть в ошибку, нужно характеризовать силы не по вызываемому ими действию, а по «источнику», вызвавшему появление силы. Это означает, что за каждой силой нужно видеть тело, воздействием которого обусловлена сила. Тогда станет невозможной типичная ошибка, заключающаяся в том, что одна и та же сила учитывается под различными названиями дважды.

В рассматриваемом примере (см. рис. 2.13) целесообразно силу реакции $\mathbf{F}_r$ разложить на две составляющие — силу нормального давления $\mathbf{F}_n$ и силу трения $\mathbf{F}_{тр}$. Это, в частности, полезно в связи с тем, что сила трения пропорциональна модулю силы $\mathbf{F}_n$ (см. (2.31)).

Определив силы, действующие на тело, составляют уравнение второго закона Ньютона. В нашем примере оно имеет вид

$$m\mathbf{w} = m\mathbf{g} + \mathbf{F}_r = m\mathbf{g} + \mathbf{F}_n + \mathbf{F}_{тр}. \tag{2.39}$$

Чтобы осуществить вычисления, нужно перейти от векторов к их проекциям на соответствующим образом выбранные направления. При этом пользуются следующими

[11]) Это не относится к термину «центробежная сила инерции» (см. § 4.2).

свойствами проекций:

1) равные векторы имеют одинаковые проекции;

2) проекция вектора, получающегося умножением какого-то другого вектора на скаляр, равна произведению проекции этого второго вектора на скаляр;

3) проекция суммы векторов равна сумме проекций складываемых векторов (см. (1.8)).

Спроецируем векторы, входящие в уравнение (2.39), на направление x, указанное на рис. 2.13. Проекции векторов равны: $w_x = w$ (w — модуль вектора $\mathbf{w}$), $g_x = g\sin\alpha$, $F_{nx} = 0$, $F_{\text{тр}\,x} = -kF_n = -kmg\cos\alpha$. Следовательно, мы приходим к уравнению

$$mw = mg\sin\alpha - kmg\cos\alpha,$$

из которого легко найти w.

В более сложных случаях приходится проецировать векторы на несколько направлений и решать получившуюся систему алгебраических или дифференциальных уравнений.

Глава 3

Законы сохранения

3.1. Сохраняющиеся величины

Тела, образующие механическую систему, могут взаимодействовать как между собой, так и с телами, не принадлежащими данной системе. В соответствии с этим силы, действующие на тела системы, можно подразделить на *внутренние* и *внешние*. Внутренними мы будем называть силы, с которыми на данное тело воздействуют остальные тела системы, внешними — силы, обусловленные воздействием тел, не принадлежащих системе. В случае, если внешние силы отсутствуют, система называется *замкнутой*.

Для замкнутых систем существуют такие функции координат и скоростей образующих систему частиц[1]), которые сохраняют при движении постоянные значения. Эти функции носят название *интегралов движения*.

Для системы из N частиц, между которыми нет жестких связей, можно образовать $6N - 1$ интегралов движения. Однако интерес представляют только те из них, которые обладают свойством аддитивности. Это свойство заключается в том, что значение интеграла движения для системы, состоящей из частей, взаимодействием которых можно пренебречь, равно сумме значений для каждой из частей в отдельности. Аддитивных интегралов движения имеется три. Один из них называется *энергией*, второй — *импульсом*, третий — *моментом импульса*.

Итак, для замкнутых систем оказываются неизменными (сохраняются) три физические величины — энергия, импульс и момент импульса. В соответствии с этим имеют место три *закона сохранения* — закон сохранения энергии, закон сохранения импульса и закон со-

---

[1]) Напомним, что частицей для краткости мы называем материальную точку.

хранения момента импульса. Эти законы тесно связаны с основными свойствами пространства и времени.

В основе сохранения энергии лежит однородность времени, т. е. равнозначность всех моментов времени. Равнозначность следует понимать в том смысле, что замена момента времени t_1 моментом t_2 без изменения значений координат и скоростей частиц не изменяет механических свойств системы. Это означает, что после указанной замены координаты и скорости частиц имеют в любой момент времени $t_2 + t$ такие же значения, какие они имели бы до замены в момент $t_1 + t$.

В основе сохранения импульса лежит однородность пространства, т. е. одинаковость свойств пространства во всех точках. Одинаковость следует понимать в том смысле, что параллельный перенос замкнутой системы из одного места пространства в другое без изменения взаимного расположения и скоростей частиц не изменяет механических свойств системы (предполагается, что на новом месте замкнутость системы не нарушается).

Наконец, в основе сохранения момента импульса лежит изотропия пространства, т. е. одинаковость свойств пространства по всем направлениям. Одинаковость следует понимать в том смысле, что поворот замкнутой системы как целого не отражается на ее механических свойствах.

Законы сохранения представляют собой мощное орудие исследования. Часто точное решение уравнений движения оказывается крайне сложным. В этих случаях с помощью законов сохранения можно и без решения уравнений движения получить ряд важных данных о протекании механических явлений. Законы сохранения не зависят от характера действующих сил. Поэтому с их помощью можно получить ряд важных сведений о поведении механических систем даже в тех случаях, когда силы оказываются неизвестными.

В последующих параграфах мы получим законы сохранения, исходя из уравнений Ньютона. Однако следует иметь в виду, что законы сохранения обладают гораздо большей общностью, чем законы Ньютона. Законы сохранения остаются строго справедливыми даже тогда, когда законы Ньютона (в частности, третий закон) претерпевают нарушения. Подчеркнем, что законы сохранения энергии, импульса и момента импульса являются точными законами, строго выполняющимися также и в релятивистской области.

3.2. Кинетическая энергия и работа

Понятия энергии и работы широко используются в повседневной жизни. Эти понятия тесно связаны друг с другом. Например, говорят об энергичном или работоспособном человеке. Греческое слово «энергия» означает «деятельность». Известно, что работа совершается за счет запаса энергии и, наоборот, совершая работу, можно увеличить запас энергии в каком-либо устройстве. Например, совершая работу при заводе часов, мы создаем запас энергии в пружине, за счет которого затем идут часы.

Энергия является общей количественной мерой движения и взаимодействия всех видов материи. Энергия не исчезает и не возникает из ничего; она может лишь переходить из одной формы в другую. Понятие энергии связывает воедино все явления природы. В соответствии с различными формами движения материи рассматривают разные виды энергии — механическую, внутреннюю, электромагнитную, ядерную и др.

В дальнейших параграфах мы дадим определения механической энергии и работы. Механическая энергия бывает двух видов — кинетическая и потенциальная. Кинетическая энергия (или энергия движения) определяется массами и скоростями рассматриваемых тел. Потенциальная энергия (или энергия положения) зависит от взаимного расположения (от конфигурации) взаимодействующих друг с другом тел.

Кинетическая энергия. Приступим к нахождению аддитивных интегралов движения. Для начала рассмотрим простейшую систему, состоящую из одной частицы (материальной точки).

Напишем уравнение движения частицы:

$$m\dot{\mathbf{v}} = \mathbf{F}. \tag{3.1}$$

Здесь $\mathbf{F}$ — результирующая сил, действующих на частицу. Умножив уравнение (3.1) на перемещение частицы $d\mathbf{s} = \mathbf{v}\,dt$, получим

$$m\mathbf{v}\dot{\mathbf{v}}\,dt = \mathbf{F}\,d\mathbf{s}. \tag{3.2}$$

Произведение $\dot{\mathbf{v}}\,dt$ представляет собой приращение скорости частицы $d\mathbf{v}$ за время dt. Соответственно

$$m\mathbf{v}\dot{\mathbf{v}}\,dt = m\mathbf{v}\,d\mathbf{v} = md\left(\frac{v^2}{2}\right) = d\left(\frac{mv^2}{2}\right) \tag{3.3}$$

(см. (1 54)). Произведя такую замену в (3.2), придем к соотношению

$$d\left(\frac{mv^2}{2}\right) = \mathbf{F}\,d\mathbf{s}. \tag{3.4}$$

Если система замкнута, т е. $\mathbf{F} = 0$, то $d(mv^2/2) = 0$, а сама величина

$$T = \frac{mv^2}{2} \tag{3.5}$$

остается постоянной. Эта величина называется кинетической энергией частицы. В случае изолированной частицы кинетическая энергия является интегралом движения[2]).

Умножив на m числитель и знаменатель выражения (3.5) и приняв во внимание, что произведение mv равно импульсу тела p, выражению для кинетической энергии можно придать вид

$$T = \frac{p^2}{2m}. \tag{3.6}$$

Работа. Если на частицу действует сила $\mathbf{F}$, кинетическая энергия не остается постоянной. В этом случае согласно (3.4) приращение кинетической энергии частицы за время dt равно скалярному произведению $\mathbf{F}\,d\mathbf{s}$ ($d\mathbf{s}$ — перемещение частицы за время dt). Величина

$$dA = \mathbf{F}\,d\mathbf{s} \tag{3.7}$$

называется работой, совершаемой силой $\mathbf{F}$ на пути ds (ds есть модуль перемещения $d\mathbf{s}$). Скалярное произведение (3.7) можно представить в виде произведения проекции силы на направление перемещения F_s и элементарного пути ds. Следовательно, можно написать, что

$$dA = F_s\,ds. \tag{3.8}$$

Из сказанного ясно, что работа характеризует изменение энергии, обусловленное действием силы на движущуюся частицу.

[2]) В случае одной изолированной частицы любая степень скорости остается постоянной. Однако в случае системы нескольких взаимодействующих частиц именно величины вида (3.5) входят слагаемыми в аддитивный интеграл движения.

Проинтегрируем соотношение (3.4) вдоль некоторой траектории от точки *1* до точки *2*:

$$\int_1^2 d\left(\frac{mv^2}{2}\right) = \int_1^2 \mathbf{F}\, d\mathbf{s}.$$

Левая часть представляет собой разность значений кинетической энергии в точках *2* и *1*, т. е. приращение[3]) кинетической энергии на пути *1–2*. Учтя это, получим выражение

$$T_2 - T_1 = \frac{mv_2^2}{2} - \frac{mv_1^2}{2} = \int_1^2 \mathbf{F}\, d\mathbf{s}. \qquad (3.9)$$

Величина

$$A = \int_1^2 \mathbf{F}\, d\mathbf{s} = \int_1^2 F_s\, ds \qquad (3.10)$$

есть работа силы **F** на пути *1–2*. Иногда мы будем обозначать эту работу символом A_{12} вместо A.

Итак, *работа результирующей всех сил, действующих на частицу, идет на приращение кинетической энергии частицы*:

$$A_{12} = T_2 - T_1. \qquad (3.11)$$

В этом заключается физический смысл работы.

Из (3.11) следует, что энергия имеет такую же размерность, как и работа. В соответствии с этим энергия измеряется в тех же единицах, что и работа (см. § 3.3).

Говоря о работе, всегда нужно помнить, что работу может совершать только сила. Это следует из определения (3.7). Совершается работа над телом, на которое действует сила.

---

[3]) Изменение какой-либо величины a можно характеризовать либо ее приращением, либо убылью. Приращением величины a, которое мы будем обозначать Δa, называют разность конечного (a_2) и начального (a_1) значений этой величины: приращение $= \Delta a = a_2 - a_1$. Убылью величины a называют разность ее начального (a_1) и конечного (a_2) значений: убыль $= a_1 - a_2 = -\Delta a$. Убыль величины равна ее приращению, взятому с обратным знаком. Приращение и убыль — алгебраические величины.

К сожалению, можно встретить по поводу работы ошибочные представления. Например, рассматривая брошенный вверх и свободно падающий камень, утверждают, что камень совершает работу против силы тяжести. Это утверждение совершенно несостоятельно. Во-первых, кроме силы тяжести нет никаких приложенных к камню сил (сопротивлением воздуха пренебрегаем). Поэтому никакой работы, кроме отрицательной работы, совершаемой силой тяжести, в данном случае нет. Во-вторых, получается, что камень совершает работу над самим собой (невольно вспоминается барон Мюнхгаузен, вытащивший себя из болота за волосы).

Часто, говоря о работе, силу подменяют ее источником. Например, говорят, что, поднимая вверх камень, мы совершаем работу против силы тяжести. Говоря так, надо помнить, что на самом деле работу совершает сила, с которой наша рука давит на камень. Говорят, что газ в закрытом поршнем сосуде расширяясь совершает работу над поршнем. Говоря так, надо помнить, что на самом деле работу совершает сила, с которой газ давит на поршень, и т. д.

3.3. Работа

Рассмотрим величину, называемую работой, более подробно. Выражение (3.7) можно представить в виде

$$dA = \mathbf{F}\,d\mathbf{s} = F\cos\alpha\cdot ds, \tag{3.12}$$

где α — угол между направлением силы и направлением перемещения точки приложения силы.

Если сила и направление перемещения образуют острый угол ($\cos\alpha > 0$), работа положительна. Если угол α тупой ($\cos\alpha < 0$), работа отрицательна. При $\alpha = \pi/2$ работа равна нулю. Последнее обстоятельство особенно отчетливо показывает, что понятие работы в механике существенно отличается от обыденного представления о работе. В обыденном понимании всякое усилие, в частности мускульное напряжение, всегда сопровождается совершением работы. Например, для того чтобы держать тяжелый груз, стоя неподвижно, а тем более для того, чтобы перенести этот груз по горизонтальному пути, человек затрачивает много усилий, т. е. «совершает работу». Однако работа как механическая величина в этих случаях равна нулю.

На рис. 3.1 показан график проекции силы на направление перемещения F_s как функции положения частицы на траектории (ось абсцисс можно назвать осью s; длина отрезка этой оси между точками *1* и *2* равна полной длине пути). Из рисунка видно, что элементарная работа $dA = F_s\,ds$ численно равна площади заштрихованной полоски, а работа A на пути *1–2* численно равна площади фигуры, ограниченной кривой $F_s(s)$ вертикальными прямыми *1* и *2* и осью s (ср. с рис. 1.26).

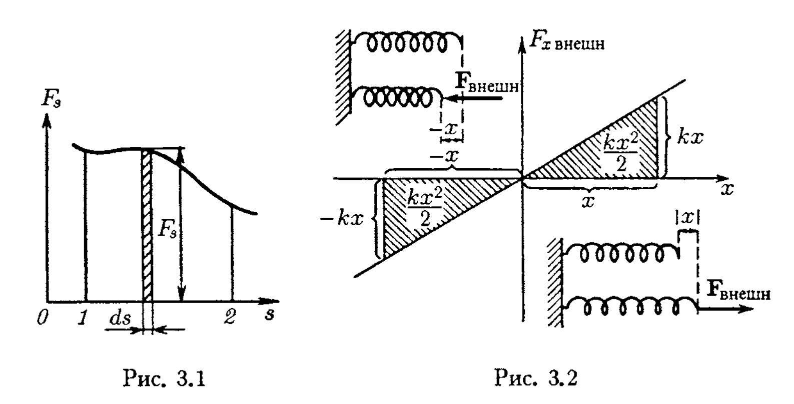


Рис. 3.1 Рис. 3.2

Применим этот результат для нахождения работы, совершаемой при деформации пружины, подчиняющейся закону Гука (см. рис. 2.4 и формулу (2.22). Начнем с растяжения пружины. Растяжение будем производить очень медленно, чтобы силу $\mathbf{F}_{\text{внешн}}$, с которой мы действуем на пружину, можно было считать все время равной по модулю упругой силе $\mathbf{F}_{\text{упр}}$. Тогда $F_{x\,\text{внешн}} = F_{x\,\text{упр}} = kx$, где x — удлинение пружины (рис. 3.2). Из рисунка видно, что работа, которую нужно совершить, чтобы вызвать удлинение x пружины, равна

$$A = \frac{kx^2}{2}. \tag{3.13}$$

При сжатии пружины на длину x совершается такая же по модулю и знаку работа, как и при растяжении на длину x. Проекция силы $\mathbf{F}_{\text{внешн}}$ в этом случае отрицательна ($\mathbf{F}_{\text{внешн}}$ направлена влево, x растет вправо; см. рис. 3.2), все отрезки dx тоже отрицательны, вследствие чего произведение $F_{x\,\text{внешн}}\,dx$ положительно.

Аналогично можно найти выражение для работы, совершаемой при упругом растяжении или сжатии стержня. В соответствии с формулой (2.27) эта работа равна

$$A = \frac{1}{2}\frac{ES}{l_0}(\Delta l)^2 = \frac{1}{2}ESl_0\left(\frac{\Delta l}{l_0}\right)^2 = \frac{1}{2}EV\varepsilon^2, \tag{3.14}$$

где $V = Sl_0$ — объем стержня, а $\varepsilon = \Delta l/l_0$ — относительное удлинение (см. (2 23)).

Пусть на тело действуют одновременно несколько сил, результирующая которых равна $\mathbf{F} = \sum\limits_i \mathbf{F}_i$. Из дистрибутивности скалярного произведения векторов (см. (1.22)) вытекает, что работа dA, совершаемая результирующей силой на пути $d\mathbf{s}$, может быть представлена в виде

$$dA = \left(\sum_i \mathbf{F}_i\right) d\mathbf{s} = \sum_i \mathbf{F}_i\, d\mathbf{s} = \sum_i dA_i. \tag{3.15}$$

Это означает, что работа результирующей нескольких сил равна алгебраической сумме работ, совершаемых каждой из сил в отдельности.

Элементарное перемещение $d\mathbf{s}$ может быть представлено как $\mathbf{v}\,dt$. Поэтому выражению для элементарной работы можно придать вид

$$dA = \mathbf{F}\mathbf{v}\,dt. \tag{3.16}$$

Тогда работа, совершаемая за промежуток времени от t_1 до t_2, может быть вычислена по формуле

$$A = \int_{t_1}^{t_2} \mathbf{F}\mathbf{v}\,dt. \tag{3.17}$$

В соответствии с (1.21) $\mathbf{F}\,d\mathbf{s} = F\,ds_F$, где ds_F — проекция элементарного перемещения $d\mathbf{s}$ на направление силы $\mathbf{F}$. Поэтому формулу для работы можно написать следующим образом:

$$dA = F\,ds_F. \tag{3.18}$$

Если сила имеет постоянные модуль и направление (рис. 3.3), вектор **F** в выражении для работы можно вынести за знак интеграла, в результате чего получится формула

$$A = \mathbf{F}\int_1^2 d\mathbf{s} = \mathbf{F}\mathbf{s} = Fs_F, \qquad (3.19)$$

где **s** — вектор перемещения из точки *1* в точку *2*, а s_F — его проекция на направление силы.

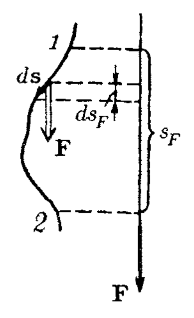


Рис 3 3

Работа, совершаемая в единицу времени, называется мощностью. Если за время dt совершается работа dA, то мощность равна

$$P = \frac{dA}{dt}. \qquad (3.20)$$

Взяв dA в виде (3.16), получим для мощности выражение

$$P = \mathbf{F}\mathbf{v}, \qquad (3.21)$$

согласно которому мощность равна скалярному произведению вектора силы на вектор скорости, с которой движется точка приложения силы.

Единицы работы и мощности. В качестве единицы работы служит работа, совершаемая силой, равной единице и действующей в направлении перемещения, на пути, равном единице. В СИ единицей работы является джоуль (Дж)[4]), который равен работе, совершаемой силой 1 Н на пути 1 м; в СГС-системе — эрг, равный работе, совершаемой силой 1 дин на пути 1 см; 3) в МКГСС-системе — килограмм-сила-метр (кгс·м), равный работе, совершаемой силой 1 кгс на пути 1 м.

Между единицами работы справедливы соотношения

$$1\ \text{Дж} = 1\ \text{Н}\cdot 1\ \text{м} = 10^5\ \text{дин}\cdot 10^2\ \text{см} = 10^7\ \text{эрг},$$
$$1\ \text{кгс}\cdot\text{м} = 1\ \text{кгс}\cdot 1\ \text{м} = 9,81\ \text{Н}\cdot 1\ \text{м} = 9,81\ \text{Дж}.$$

За единицу мощности принимается такая мощность, при которой в единицу времени совершается работа, равная единице. В СИ единицей мощности является ватт

[4]) В честь английского физика Джеймса Прескотта Джоуля (1818–1889).

(Вт) [5]), равный джоулю в секунду (Дж/с). Единица мощности в СГС-системе (эрг/с) специального названия не имеет. Соотношение между ваттом и эрг/с равно 1 Вт $=$ $= 10^7$ эрг/с.

В МКГСС-системе единицей мощности служит лошадиная сила (л.с.), равная 75 килограмм-сила-метрам в секунду, 1 л.с. $=$ 736 Вт.

Кроме указанных единиц измерения применяются кратные и дольные единицы. Их наименования и обозначения образуются из наименования и обозначения основной единицы и приставок, указанных в табл. 3.1. В таблице указаны также множители, с помощью которых соответствующие кратные и дольные единицы образуются из основных.

Таблица 3.1

Наименования и обозначения приставок, употребляемых для образования кратных и дольных единиц

Наименование	Обозначение	Множитель	Наименование	Обозначение	Множитель
тера	Т	10^{12}	санти	с	10^{-2}
гига	Г	10^9	милли	м	10^{-3}
мега	М	10^6	микро	мк	10^{-6}
кило	к	10^3	нано	н	10^{-9}
гекто	г	10^2	пико	п	10^{-12}
дека	да	10^1	фемто	ф	10^{-15}
деци	д	10^{-1}	атто	а	10^{-18}

Например, единица работы, именуемая мегаджоулем, эквивалентна 10^6 джоулям (1 МДж $= 10^6$ Дж), а единица мощности, именуемая микроваттом, эквивалентна 10^{-6} ватта (1 мкВт $= 10^{-6}$ Вт). Аналогично 1 мкм $=$ $= 10^{-6}$ м, 1 пН $= 10^{-12}$ Н.

3.4. Консервативные силы

Кроме контактных взаимодействий, возникающих между соприкасающимися телами, наблюдаются также взаимодействия между телами, удаленными друг от друга. Примерами могут служить взаимодействия между Солнцем и Землей, Землей и Луной, Землей и поднятым над ее

[5]) В честь английского изобретателя Джеймса Уатта (1736–1819), создавшего паровой двигатель.

поверхностью телом, взаимодействие между наэлектризованными телами. Подобные взаимодействия осуществляются посредством **физических полей**, которые представляют собой особую форму материи. Каждое тело создает в окружающем его пространстве особое состояние, называемое **силовым полем**. Это поле проявляет себя в действии сил на другие тела. Например, в гравитационном поле, создаваемом Землей, на тело массы m в каждой точке пространства вблизи поверхности Земли действует сила $m\mathbf{g}$.

В качестве второго примера рассмотрим заряженную частицу e, находящуюся в электрическом поле, возбуждаемом неподвижным точечным зарядом q (рис. 3.4). Это поле характерно тем, что направление силы, действующей на частицу в любой точке пространства, проходит через неподвижный центр (заряд q), а модуль силы зависит только от расстояния до этого центра: $F = F(r)$ (см. формулу (2.19)). Поле сил, обладающее такими свойствами, называется **центральным**.

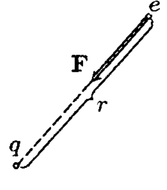


Рис. 3.4

Если во всех точках поля силы, действующие на частицу, одинаковы по модулю и направлению ($\mathbf{F} = \text{const}$), поле называется **однородным**.

Поле, изменяющееся со временем, называется **нестационарным**; поле, остающееся постоянным во времени, — **стационарным**.

Для стационарного поля может оказаться, что работа, совершаемая над частицей силами поля, зависит лишь от начального и конечного положений частицы и не зависит от пути, по которому двигалась частица. Силы, обладающие таким свойством, называются **консервативными**.

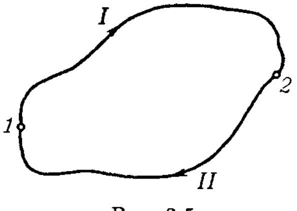


Рис. 3.5

Из независимости работы консервативных сил от пути вытекает, что работа таких сил на замкнутом пути равна нулю. Чтобы доказать это, разобьем произвольный замкнутый путь на две части: путь I, по которому частица переходит из точки 1 в точку 2, и путь II, по которому частица переходит из точки 2 в точку 1, причем точки 1 и 2 выберем произвольно (рис. 3.5). Работа на всем замкнутом пути равна сумме работ, совер-

шаемых на каждом из участков:

$$A = (A_{12})_{\rm I} + (A_{21})_{\rm II}. \tag{3.22}$$

Легко сообразить, что работы $(A_{21})_{\rm II}$ и $(A_{12})_{\rm II}$ различаются только знаком. Действительно, изменение направления движения на обратное приводит к замене $d\mathbf{s}$ на $-d\mathbf{s}$, вследствие чего значение интеграла $\int \mathbf{F}\, d\mathbf{s}$ изменяет знак на обратный. Таким образом, равенство (3.22) можно записать в виде

$$A = (A_{12})_{\rm I} - (A_{12})_{\rm II},$$

и, поскольку работа не зависит от пути, т. е. $(A_{12})_{\rm I} = (A_{12})_{\rm II}$, мы приходим к выводу, что $A = 0$.

Из равенства нулю работы на замкнутом пути легко получить, что работа A_{12} не зависит от пути. Это можно сделать, обратив ход проведенных выше рассуждений.

Таким образом, консервативные силы можно определить двумя способами:

1) как силы, работа которых не зависит от пути, по которому частица переходит из одного положения в другое;

2) как силы, работа которых на любом замкнутом пути равна нулю.

Докажем, что сила тяжести является консервативной. Эта сила в любой точке имеет одинаковый модуль и одинаковое направление — вниз по вертикали (рис. 3.6). Поэтому независимо от того, по какому из путей (например,

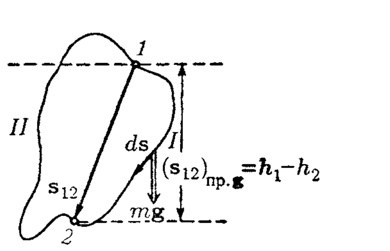


Рис. 3.6

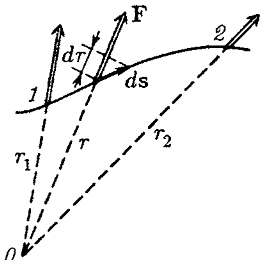


Рис. 3.7

I или II; см. рисунок) движется частица, работа A_{12} согласно (3.19) определяется выражением

$$A_{12} = m\mathbf{g}\mathbf{s}_{12} = mg(\mathbf{s}_{12})_{\text{пр}\cdot\mathbf{g}}.$$

Из рис. 3.6 видно, что проекция вектора $\mathbf{s}_{12}$ на направление $\mathbf{g}$ равна разности высот $h_1 - h_2$. Следовательно, выражение для работы можно написать в виде

$$A_{12} = mg(h_1 - h_2). \tag{3.23}$$

Последнее выражение, очевидно, не зависит от пути; отсюда следует, что сила тяжести консервативна.

Легко сообразить, что такой же результат получается для всякого стационарного однородного поля.

Силы, действующие на частицу в центральном поле, также консервативны. Согласно формуле (3.18) элементарная работа на пути ds (рис. 3.7) равна

$$dA = F(r)\, ds_F,$$

но так как проекция $d\mathbf{s}$ на направление силы в данном месте, т. е. на направление радиуса-вектора $\mathbf{r}$, равна dr — приращению расстояния частицы от силового центра O: $ds_F = dr$, то $dA = F(r)\, dr$. Следовательно работа на всем пути

$$A_{12} = \int_{r_1}^{r_2} F(r)\, dr. \tag{3.24}$$

Последнее выражение зависит только от вида функции $F(r)$ и от значений r_1 и r_2. От вида траектории оно никак не зависит, откуда следует, что силы консервативны.

Чтобы у читателя не возникло ошибочного представления, будто любая сила, зависящая только от координат точки, является консервативной, рассмотрим следующий пример. Пусть компоненты силы определяются формулами

$$F_x = ay, \quad F_y = -ax, \quad F_z = 0. \tag{3.25}$$

Эта сила имеет модуль, равный $F = ar$, и направлена по касательной к окружности радиуса r (рис. 3.8).

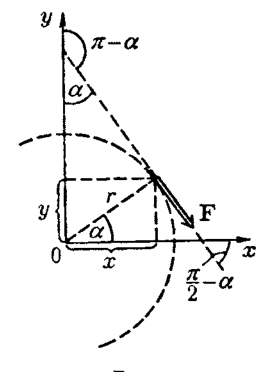


Рис. 3.8

Действительно, как следует из рисунка, для силы с таким модулем и направлением имеем

$$F_x = ar\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = ar\sin\alpha = ar\frac{y}{r} = ay,$$
$$F_y = ar\cos(\pi - \alpha) = -ar\cos\alpha = -ar\frac{x}{r} = -ax,$$

что совпадает со значениями (3.25). Возьмем замкнутый путь в виде окружности радиуса r с центром в начале координат. Работа силы на этом пути, очевидно, равна $F \cdot 2\pi r = ar \cdot 2\pi r = 2\pi ar^2$, т. е. отлична от нуля. Следовательно, сила неконсервативна.

Типичными неконсервативными силами являются силы трения. Так как сила трения $\mathbf{F}$ и скорость частицы $\mathbf{v}$ имеют противоположные направления [6]), работа силы трения на каждом участке пути отрицательна:

$$dA = \mathbf{F}\,d\mathbf{s} = \mathbf{F}\mathbf{v}\,dt = -Fv\,dt = -F\,ds < 0.$$

Поэтому будет отрицательной (т. е. отличной от нуля) и работа на любом замкнутом пути. Отсюда вытекает, что силы трения не консервативны.

Отметим, что поле консервативных сил является частным случаем потенциального силового поля. Поле сил называется *потенциальным*, если его можно описать с помощью функции $\Pi(x, y, z, t)$, градиент которой (см. § 3.5, формулу (3.31)) определяет силу в каждой точке поля: $\mathbf{F} = \nabla\Pi$ (ср. с (3.32)). Функция Π называется *потенциальной функцией* или *потенциалом*. В случае, когда потенциал не зависит явно от времени, т. е. $\Pi = \Pi(x, y, z)$, потенциальное поле оказывается стационарным, а его силы — консервативными. В этом случае

$$\Pi(x, y, z) = -U(x, y, z),$$

где $U(x, y, z)$ — потенциальная энергия частицы (§ 3.5).

Для нестационарного силового поля, описываемого потенциалом $\Pi(x, y, z, t)$, отождествлять потенциальные и консервативные силы нельзя.

---

[6]) Здесь имеется в виду случай трения между движущимся телом и неподвижными (относительно системы отсчета) телами. В некоторых случаях работа силы трения может оказаться положительной. Это бывает, например, когда сила трения обусловлена взаимодействием данного тела с другим, движущимся в том же направлении, но с большей скоростью.

3.5. Потенциальная энергия во внешнем поле сил

В случае, когда работа сил поля не зависит от пути, а зависит лишь от начального и конечного положений частицы, каждой точке поля можно сопоставить некоторую функцию $U(x, y, z)$ такую, что разность значений этой функции в точках *1* и *2* будет определять работу сил при переходе частицы из первой точки во вторую:

$$A_{12} = U_1 - U_2. \tag{3.26}$$

Это сопоставление можно осуществить следующим образом. Некоторой исходной точке O припишем произвольное значение функции, равное U_0. Любой другой точке P припишем значение

$$U(P) = U_0 + A_{PO}, \tag{3.27}$$

где A_{PO} — работа, совершаемая над частицей консервативными силами при перемещении частицы из точки P в точку O. Поскольку работа не зависит от пути, определенное таким способом значение $U(P)$ будет однозначным. Отметим, что функция $U(P)$ имеет размерность работы (или энергии).

В соответствии с (3.27) значения функции в точках *1* и *2* равны

$$U_1 = U_0 + A_{1O}, \quad U_2 = U_0 + A_{2O}.$$

Образуем разность этих значений и примем во внимание, что $A_{2O} = -A_{O2}$ (см. § 3.4). В результате получим

$$U_1 - U_2 = A_{1O} - A_{2O} = A_{1O} + A_{O2}.$$

Сумма $A_{1O} + A_{O2}$ дает работу, совершаемую силами поля при перемещении частицы из точки *1* в точку *2* по траектории, проходящей через точку O. Однако работа, совершаемая над частицей при ее перемещении из точки *1* в точку *2* по любой другой траектории (в том числе и не проходящей через точку O), будет такой же. Поэтому сумму $A_{1O} + A_{O2}$ можно написать просто в виде A_{12}. В итоге получится соотношение (3.26).

Таким образом, с помощью функции U можно определять работу, совершаемую над частицей консервативными силами на любом пути, начинающемся в произвольной точке *1* и заканчивающемся в произвольной точке *2*.

Пусть на частицу действуют только консервативные силы. Тогда работа, совершаемая над частицей на пути 1—2, может быть представлена в виде (3.26). Согласно формуле (3.11) эта работа идет на приращение кинетической энергии частицы. Таким образом, мы приходим к равенству

$$T_2 - T_1 = U_1 - U_2,$$

из которого следует, что

$$T_2 + U_2 = T_1 + U_1.$$

Полученный результат означает, что величина

$$E = T + U \tag{3.28}$$

для частицы, находящейся в поле консервативных сил, остается постоянной, т. е. является интегралом движения.

Из (3.28) следует, что U входит слагаемым в интеграл движения, имеющий размерность энергии. В связи с этим функцию $U(x, y, z)$ называют потенциальной энергией частицы во внешнем поле сил. Величину E, равную сумме кинетической и потенциальной энергий, называют полной механической энергией частицы.

В соответствии с (3.26) работа, совершаемая над частицей консервативными силами, равна убыли потенциальной энергии частицы. Иначе можно сказать, что работа совершается за счет запаса потенциальной энергии.

Из (3.27) вытекает, что потенциальная энергия оказывается определенной с точностью до некоторой неизвестной аддитивной постоянной U_0. Однако это обстоятельство не имеет никакого значения, так как во все физические соотношения входит либо разность значений U в двух положениях тела, либо производная функции U по координатам. Практически условливаются считать потенциальную энергию тела в каком-то положении равной нулю, а энергию в других положениях брать по отношению к этой энергии.

Зная вид функции $U(x, y, z)$, можно найти силу, действующую на частицу в каждой точке поля. Рассмотрим перемещение частицы параллельно оси x на dx. Такое перемещение сопровождается совершением над частицей работы, равной $dA = \mathbf{F}\, d\mathbf{s} = F_x\, dx$ (компоненты перемещения dy и dz равны нулю). Согласно (3.26) та же работа

может быть представлена как убыль потенциальной энергии: $dA = -dU$. Приравняв оба выражения для работы получим, что

$$F_x\,dx = -dU.$$

Отсюда

$$F_x = -\frac{dU}{dx} \quad (y = \text{const},\ z = \text{const}).$$

Выражение, стоящее справа, представляет собой производную функции $U(x, y, z)$, вычисленную в предположении, что переменные y и z остаются неизменными, а изменяется лишь переменная x. Подобные производные называются частными и обозначаются, в отличие от производных функций одной переменной, символом dU/dx. Следовательно, компонента силы по оси x равна взятой с обратным знаком частной производной потенциальной энергии по переменной x: $F_x = -\partial U/\partial x$. Для компонент силы по осям y и z получаются аналогичные выражения. Таким образом,

$$F_x = -\frac{\partial U}{\partial x}, \quad F_y = -\frac{\partial U}{\partial y}, \quad F_z = -\frac{\partial U}{\partial z}. \tag{3.29}$$

Зная компоненты, можно найти вектор силы:

$$\mathbf{F} = F_x\mathbf{e}_x + F_y\mathbf{e}_y + F_z\mathbf{e}_z = -\frac{\partial U}{\partial x}\mathbf{e}_x - \frac{\partial U}{\partial y}\mathbf{e}_y - \frac{\partial U}{\partial z}\mathbf{e}_z. \tag{3.30}$$

Вектор с компонентами $\partial\varphi/\partial x, \partial\varphi/\partial y, \partial\varphi/\partial z$, где φ — скалярная функция координат x, y, z, называется **градиентом** функции φ и обозначается символом $\operatorname{grad}\varphi$ либо $\nabla\varphi$ (∇ называется **оператором набла**, $\nabla\varphi$ читается так: «градиент фи») Из определения градиента следует, что

$$\nabla\varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial x}\mathbf{e}_x + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\mathbf{e}_y + \frac{\partial\varphi}{\partial z}\mathbf{e}_z. \tag{3.31}$$

Сравнение (3.30) с (3.31) показывает, что консервативная сила равна градиенту потенциальной энергии, взятому с обратным знаком:

$$\mathbf{F} = -\nabla U. \tag{3.32}$$

Пусть частица, на которую действует сила (3.32), перемещается на отрезок $d\mathbf{s}$, имеющий компоненты dx, dy, dz. При этом сила совершает работу

$$dA = \mathbf{F}\,d\mathbf{s} = -\nabla U\,d\mathbf{s} = -\left(\frac{\partial U}{\partial x}dx + \frac{\partial U}{\partial y}dy + \frac{\partial U}{\partial z}dz\right).$$

Приняв во внимание, что $dA = -dU$, получим для приращения функции U следующее выражение:

$$dU = \frac{\partial U}{\partial x}dx + \frac{\partial U}{\partial y}dy + \frac{\partial U}{\partial z}dz. \qquad (3.33)$$

Выражение вида (3.33) называется полным дифференциалом соответствующей функции.

Понятие полного дифференциала играет в физике большую роль. **Полным дифференциалом** однозначной функции $f(x,y,z)$ называется приращение, которое получает эта функция при переходе от точки с координатами x, y, z в соседнюю точку с координатами $x+dx$, $y+dy$, $z+dz$. По определению это приращение равно

$$df(x,y,z) = f(x+dx,\ y+dy,\ z+dz) - f(x,y,z)$$

и, следовательно, определяется лишь значениями функции в начальной и конечной точках. Поэтому оно не может зависеть от пути, по которому происходит переход. Возьмем в качестве такого пути ломаную линию, состоящую из отрезков dx, dy и dz (рис. 3.9). На отрезке dx функция $f(x,y,z)$ ведет себя как функция одной лишь переменной x и получает приращение $(\partial f/\partial x)dx$. Аналогично на отрезках dy и dz функция получает приращения $(\partial f/\partial y)dy$ и $(\partial f/\partial z)dz$.

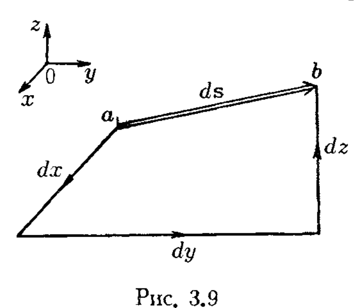


Рис. 3.9

Таким образом, полное приращение функции при переходе из начальной точки в конечную равно

$$df(x,y,z) = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy + \frac{\partial f}{\partial z}dz. \qquad (3.34)$$

Мы пришли к выражению для полного дифференциала (ср. с (3.33)).

Не всякое выражение вида

$$P(x, y, z)\,dx + Q(x, y, z)\,dy + R(x, y, z)\,dz$$

представляет собой полный дифференциал некоторой функции $f(x, y, z)$. В частности, выражение для работы, совершаемой силой (3.25),

$$dA = ay\,dx - ax\,dy \tag{3.35}$$

не является полным дифференциалом: не существует такой функции U, для которой $-\partial U/\partial x = ay$, а $-\partial U/\partial y = -ax$ (см. (3.25)). Соответственно не существует функции U, убыль которой определяла бы работу (3.35).

Из сказанного вытекает, что консервативными могут быть только силы, удовлетворяющие условию (3.32), т. е. такие силы, компоненты которых по координатным осям равны взятым с обратным знаком частным производным некоторой функции $U(x, y, z)$ по соответствующим координатам. Эта функция представляет собой потенциальную энергию частицы.

Конкретный вид функции $U(x, y, z)$ зависит от характера силового поля. Найдем в качестве примера потенциальную энергию частицы в поле сил тяжести. Согласно (3.23) работа, совершаемая над частицей силами этого поля, равна

$$A_{12} = mg(h_1 - h_2).$$

С другой стороны, согласно (3.26)

$$A_{12} = U_1 - U_2.$$

Сравнив оба выражения для работы, придем к заключению, что потенциальная энергия частицы в поле сил тяжести определяется выражением

$$U = mgh, \tag{3.36}$$

где h отсчитывается от произвольного уровня.

Начало отсчета потенциальной энергии можно выбирать произвольно. Поэтому U может иметь отрицательные значения. Если, например, принять за нуль потенциальную энергию частицы, находящейся на поверхности

Земли, то потенциальная энергия частицы, лежащей на дне ямы глубины h', будет равна $U = -mgh'$ (рис. 3.10). Отметим, что кинетическая энергия не может быть отрицательной.

Рис. 3.10

Пусть на частицу, кроме консервативных сил, действует также неконсервативная сила $\mathbf{F}^*$. Тогда при переходе частицы из точки 1 в точку 2 над ней будет совершаться работа

$$A_{12} = \int_1^2 \mathbf{F}\,d\mathbf{s} + \int \mathbf{F}^*\,d\mathbf{s} = A_{\text{консерв}} + A^*_{12},$$

где A^*_{12} — работа неконсервативной силы. Работу консервативных сил $A_{\text{консерв}}$ можно представить как $U_1 - U_2$. В результате получим, что

$$A_{12} = U_1 - U_2 + A^*_{12}.$$

Суммарная работа всех приложенных к частице сил идет на приращение кинетической энергии частицы (см. (3.11)). Следовательно,

$$T_2 - T_1 = U_1 - U_2 + A^*_{12},$$

откуда, приняв во внимание, что $T + U = E$, получаем

$$E_2 - E_1 = A^*_{12}. \qquad (3.37)$$

Полученный результат означает, что работа неконсервативных сил затрачивается на приращение полной механической энергии частицы.

В случае, если в конечном и начальном положениях кинетическая энергия частицы одинакова (в частности, равна нулю), работа неконсервативных сил идет на приращение потенциальной энергии частицы:

$$A^*_{12} = U_2 - U_1 \quad (T_2 = T_1). \qquad (3.38)$$

Это соотношение бывает полезно при нахождении разности значений потенциальной энергии.

Рассмотрим систему, состоящую из N не взаимодействующих между собой частиц, находящихся в поле консервативных сил. Каждая из частиц обладает кинетической энергией $T_i = m_i v_i^2/2$ (i — номер частицы) и потенциальной энергией $U_i = U_i(x_i, y_i, z_i)$. Рассматривая i-ю частицу независимо от других частиц, можно получить, что

$$E_i = T_i + U_i = \mathrm{const}_i.$$

Просуммировав это равенство по всем частицам, придем к соотношению

$$E = \sum_{i=1}^{N} E_i = \sum_{i=1}^{N} T_i + \sum_{i=1}^{N} U_i = \mathrm{const}. \qquad (3.39)$$

Из этого соотношения следует аддитивность полной механической энергии для рассматриваемой системы.

Согласно (3.39) *полная механическая энергия системы невзаимодействующих частиц, на которые действуют только консервативные силы, остается постоянной.* Это утверждение выражает закон сохранения энергии для указанной механической системы.

Если, кроме консервативных сил, на частицы действуют неконсервативные силы $\mathbf{F}_i^*$, полная энергия системы не остается постоянной, причем

$$E_2 - E_1 = \sum_{i=1}^{N} (A_{12}^*)_i, \qquad (3.40)$$

где $(A_{12}^*)_i$ — работа, совершаемая неконсервативной силой, приложенной к i-й частице, при перемещении этой частицы из ее начального положения в конечное.

В конце предыдущего параграфа мы установили, что работа сил трения всегда отрицательна Поэтому при наличии в системе сил трения полная механическая энергия системы уменьшается (рассеивается). переходя в немеханические формы энергии (например, во внутреннюю энергию тел). Такой процесс называется диссипацией энергии (латинское слово «диссипация» означает рассеяние). Силы, приводящие к диссипации энергии, называются диссипативными. Таким образом, силы трения

являются диссипативными. В общем случае диссипативными называются силы, всегда направленные противоположно скоростям частиц и, следовательно, вызывающие их торможение.

Отметим, что неконсервативные силы не обязательно являются диссипативными.

3.6. Потенциальная энергия взаимодействия

До сих пор мы рассматривали системы невзаимодействующих частиц. Теперь перейдем к рассмотрению системы из двух взаимодействующих друг с другом частиц. Обозначим силу, с которой вторая частица действует на первую, символом $\mathbf{F}_{12}$, а силу, с которой первая частица действует на вторую, — символом $\mathbf{F}_{21}$. В соответствии с третьим законом Ньютона $\mathbf{F}_{12} = -\mathbf{F}_{21}$.

Введем вектор $\mathbf{R}_{12} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1$, где $\mathbf{r}_1$ и $\mathbf{r}_2$ — радиусы-векторы частиц (рис. 3.11). Расстояние между частицами равно модулю этого вектора. Допустим, что силы $\mathbf{F}_{12}$ и $\mathbf{F}_{21}$ имеют модуль, зависящий только от расстояния R_{12}

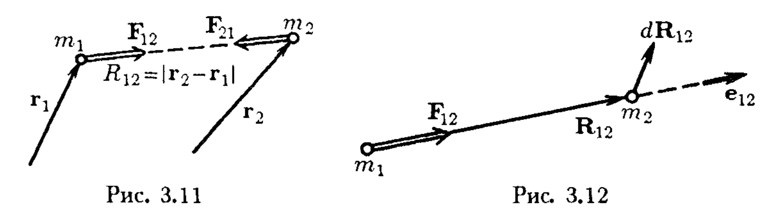


Рис. 3.11 Рис. 3.12

между частицами, и направлены вдоль соединяющей частицы прямой. Это, как мы знаем, справедливо для сил гравитационного и кулоновского взаимодействий (см. формулы (2.14) и (2.19)).

При сделанных допущениях силы $\mathbf{F}_{12}$ и $\mathbf{F}_{21}$ можно представить в виде

$$\mathbf{F}_{12} = f(R_{12})\mathbf{e}_{12}, \quad \mathbf{F}_{21} = -f(R_{12})\mathbf{e}_{12}, \qquad (3.41)$$

где $\mathbf{e}_{12}$ — орт вектора $\mathbf{R}_{12}$ (рис. 3.12), а $f(R_{12})$ — некоторая функция R_{12}, положительная в случае взаимного притяжения частиц и отрицательная в случае их отталкивания друг от друга.

Считая систему замкнутой (внешних сил нет), напишем уравнения движения обеих частиц:

$$m_1\dot{\mathbf{v}}_1 = \mathbf{F}_{12}, \quad m_2\dot{\mathbf{v}}_2 = \mathbf{F}_{21}.$$

Умножим первое уравнение на $d\mathbf{r}_1 = \mathbf{v}_1\,dt$, второе — на $d\mathbf{r}_2 = \mathbf{v}_2\,dt$ и сложим их [7]. В результате получится соотношение

$$m_1\mathbf{v}_1\dot{\mathbf{v}}_1\,dt + m_2\mathbf{v}_2\dot{\mathbf{v}}_2\,dt = \mathbf{F}_{12}\,d\mathbf{r}_1 + \mathbf{F}_{21}\,d\mathbf{r}_2. \qquad (3.42)$$

Левая часть этого соотношения представляет собой приращение кинетической энергии системы за время dt (см. (3.3)), правая часть — работу внутренних сил за то же время.

С учетом выражений (3.41) правую часть формулы (3.42) можно преобразовать следующим образом:

$$\begin{aligned} dA_{\text{внутр}} &= \mathbf{F}_{12}\,d\mathbf{r}_1 + \mathbf{F}_{21}\,d\mathbf{r}_2 = \\ &= f(R_{12})\mathbf{e}_{12}\,d\mathbf{r}_1 - f(R_{12})\mathbf{e}_{12}\,d\mathbf{r}_2 = \\ &= -f(R_{12})\mathbf{e}_{12}\,d(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1) = -f(R_{12})\mathbf{e}_{12}\,d\mathbf{R}_{12}. \qquad (3.43) \end{aligned}$$

Из рис. 3.12 видно, что скалярное произведение $\mathbf{e}_{12}\,d\mathbf{R}_{12}$ равно dR_{12} — приращению расстояния между частицами. Таким образом,

$$dA_{\text{внутр}} = -f(R_{12})\,dR_{12}. \qquad (3.44)$$

Выражение $f(R_{12})\,dR_{12}$ можно рассматривать как приращение некоторой функции от R_{12}. Обозначив эту функцию через $U(R_{12})$, придем к равенству

$$f(R_{12})\,dR_{12} = dU(R_{12}). \qquad (3.45)$$

Следовательно,

$$dA_{\text{внутр}} = -dU. \qquad (3.46)$$

С учетом всего сказанного выражение (3.42) можно представить в виде $dT = -dU$ или

$$dE = d(T + U) = 0, \qquad (3.47)$$

откуда следует, что величина $E = T + U$ для рассматриваемой замкнутой системы сохраняется. Функция $U(R_{12})$ представляет собой *потенциальную энергию взаимодействия*. Она зависит от расстояния между частицами.

---

[7]) В данном случае целесообразно обозначить перемещение частицы через $d\mathbf{r}$ вместо $d\mathbf{s}$.

Пусть частицы переместились из положений, в которых расстояние между ними было равно $R_{12}^{(a)}$, в новые положения, в которых расстояние между ними стало равным $R_{12}^{(b)}$. В соответствии с (3.46) внутренние силы совершают при этом над частицами работу

$$A_{ab\,\text{внутр}} = -\int_a^b dU = U(R_{12}^{(a)}) - U(R_{12}^{(b)}). \tag{3.48}$$

Из (3.48) вытекает, что работа сил (3.41) не зависит от путей, по которым перемещались частицы, и определяется лишь начальным и конечным расстояниями между частицами (начальной и конечной конфигурациями системы). Таким образом, силы взаимодействия вида (3.41) являются консервативными.

Если движутся обе частицы, полная энергия системы равна

$$E = \frac{m_1 v_1^2}{2} + \frac{m_2 v_2^2}{2} + U_{\text{вз}}(R_{12}). \tag{3.49}$$

Предположим, что частица *1* закреплена в некоторой точке, которую мы примем за начало координат ($\mathbf{r}_1 = 0$). В результате эта частица утратит возможность двигаться, так что кинетическая энергия будет состоять лишь из одного слагаемого $m_2 v_2^2/2$. Потенциальная энергия в этом случае будет функцией только r_2. Поэтому выражение (3.49) примет вид

$$E = \frac{m_2 v_2^2}{2} + U_{\text{вз}}(r_2). \tag{3.50}$$

Если рассматривать систему, состоящую из одной только частицы *2*, то функция $U_{\text{вз}}(r_2)$ будет играть роль потенциальной энергии частицы *2* в поле сил, создаваемых частицей *1*, хотя по существу эта функция является потенциальной энергией взаимодействия частиц *1* и *2*. Вообще потенциальная энергия во внешнем поле сил является энергией взаимодействия между телами системы и телами, создающими внешнее по отношению к системе силовое поле.

Обратимся снова к системе из двух взаимодействующих свободных («незакрепленных») частиц. Если на первую частицу, кроме внутренней силы, действует внешняя сила $\mathbf{F}_1^*$, а на вторую частицу — сила $\mathbf{F}_2^*$, то в правой части

соотношения (3.42) появятся слагаемые $\mathbf{F}_1^* d\mathbf{r}_1$ и $\mathbf{F}_2^* d\mathbf{r}_2$, которые в сумме дадут работу внешних сил $dA_{\text{внешн}}$. Соответственно формула (3.47) примет вид

$$d(T + U_{\text{вз}}) = dA_{\text{внешн}}. \tag{3.51}$$

В случае, когда суммарная кинетическая энергия частиц остается постоянной (например, равной нулю), соотношение (3.51) выглядит следующим образом:

$$dU_{\text{вз}} = dA_{\text{внешн}} \quad (dT = 0). \tag{3.52}$$

Проинтегрировав это соотношение от конфигурации a до конфигурации b, получим, что

$$U_{\text{вз}}(R_{12}^{(b)}) - U_{\text{вз}}(R_{12}^{(a)}) = A_{ab\,\text{внешн}} \quad (T_b = T_a) \tag{3.53}$$

(ср. с формулой (3.38)).

Распространим полученные результаты на систему из трех взаимодействующих частиц. В этом случае работа внутренних сил равна

$$dA_{\text{внутр}} = (\mathbf{F}_{12} + \mathbf{F}_{13})\, d\mathbf{r}_1 + (\mathbf{F}_{21} + \mathbf{F}_{23})\, d\mathbf{r}_2 + (\mathbf{F}_{31} + \mathbf{F}_{32})\, d\mathbf{r}_3. \tag{3.54}$$

Учтя, что $\mathbf{F}_{ik} = -\mathbf{F}_{ki}$, придадим выражению (3.54) вид

$$dA_{\text{внутр}} = -\mathbf{F}_{12}\, d(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1) - \mathbf{F}_{13}\, d(\mathbf{r}_3 - \mathbf{r}_1) - \\ - \mathbf{F}_{23}\, d(\mathbf{r}_3 - \mathbf{r}_2) = -\mathbf{F}_{12}\, d\mathbf{R}_{12} - \mathbf{F}_{13}\, d\mathbf{R}_{13} - \mathbf{F}_{23}\, d\mathbf{R}_{23}, \tag{3.55}$$

где $\mathbf{R}_{ik} = \mathbf{r}_k - \mathbf{r}_i$.

Предположим, что внутренние силы могут быть представлены в виде $\mathbf{F}_{ik} = f_{ik}(R_{ik})\mathbf{e}_{ik}$ (ср. с (3.41)). Тогда

$$dA_{\text{внутр}} = -f_{12}(R_{12})\mathbf{e}_{12}\, d\mathbf{R}_{12} - \\ - f_{13}(R_{13})\mathbf{e}_{13}\, d\mathbf{R}_{13} - -f_{23}(R_{23})\mathbf{e}_{23}\, d\mathbf{R}_{23}.$$

Каждое из произведений $\mathbf{e}_{ik}\, d\mathbf{R}_{ik}$ равно приращению расстояния между соответствующими частицами dR_{ik}. Поэтому

$$dA_{\text{внутр}} = -f_{12}(R_{12})\, dR_{12} - f_{13}(R_{13})\, dR_{13} - \\ - f_{23}(R_{23})\, dR_{23} = -d[U_{12}(R_{12}) + U_{13}(R_{13}) + \\ + U_{23}(R_{23})] = -dU_{\text{вз}}. \tag{3.56}$$

Здесь

$$U_{вз} = U_{12}(R_{12}) + U_{13}(R_{13}) + U_{23}(R_{23}) \qquad (3.57)$$

есть потенциальная энергия взаимодействия системы. Она слагается из энергий взаимодействия частиц, взятых попарно.

Приравняв dT сумме работ $dA_{внутр} = -dU_{вз}$ и $dA_{внешн}$, придем к соотношению (3.51), в котором под $U_{вз}$ следует понимать выражение (3.57).

Полученный результат легко обобщается на систему с любым числом частиц. Для системы из N взаимодействующих частиц потенциальная энергия взаимодействия слагается из энергий взаимодействия частиц, взятых попарно.

$$U_{вз} = U_{12}(R_{12}) + U_{13}(R_{13}) + \ldots + U_{1N}(R_{1N}) + \\ + U_{23}(R_{23}) + \ldots + U_{2N}(R_{2N}) + \ldots \\ \ldots + U_{N-1,N}(R_{N-1,N}). \qquad (3.58)$$

Эту сумму можно написать следующим образом:

$$U_{вз} = \sum_{i<k} U_{ik}(R_{ik}) \qquad (3.59)$$

(обратите внимание на то, что в выражении (3.58) у каждого слагаемого первый индекс имеет значение меньшее, чем второй). В связи с тем, что $U_{ik}(R_{ik}) = U_{ki}(R_{ki})$, энергию взаимодействия можно представить также в виде

$$U_{вз} = \frac{1}{2}\sum_{i \neq k} U_{ik}(R_{ik}). \qquad (3.60)$$

В суммах (3.59) и (3.60) индексы i и k пробегают значения от 1 до N, согласующиеся с условием $i < k$ или $i \neq k$.

Пусть система состоит из четырех частиц, причем взаимодействуют лишь первая частица со второй и третья с четвертой. Тогда полная энергия системы будет равна

$$E = T_1 + T_2 + T_3 + T_4 + U_{12} + U_{34} = \\ = (T_1 + T_2 + U_{12}) + (T_3 + T_4 + U_{34}) = E' + E''. \qquad (3.61)$$

Здесь E' — полная энергия подсистемы, образованной частицами *1* и *2*, E'' — полная энергия подсистемы, образованной частицами *3* и *4*. По предположению взаимодействие между подсистемами отсутствует. Соотношение (3.61) доказывает аддитивность энергии (см. третий абзац § 3.1).

В заключение найдем вид функции $U_{вз}$ в том случае, когда сила взаимодействия обратно пропорциональна квадрату расстояния между частицами:

$$f(R_{12}) = \frac{\alpha}{R_{12}^2} \qquad (3.62)$$

(α — константа). Напомним, что в случае притяжения между частицами $\alpha > 0$, а в случае отталкивания частиц друг от друга $\alpha < 0$ (см. текст, следующий за формулой (3.41)).

В соответствии с (3.45)

$$dU_{вз} = f(R_{12})\, dR_{12} = \frac{\alpha}{R_{12}^2}\, dR_{12}.$$

Интегрирование дает

$$U_{вз} = -\frac{\alpha}{R_{12}} + \text{const}. \qquad (3.63)$$

Как и потенциальная энергия во внешнем поле сил, потенциальная энергия взаимодействия определяется с точностью до произвольной аддитивной постоянной. Обычно полагают, что при $R_{12} = \infty$ потенциальная энергия обращается в нуль (при таком расстоянии сила (3.62) обращается в нуль — взаимодействие между частицами исчезает). Тогда аддитивная константа в (3.63) становится равной нулю и выражение для потенциальной энергии взаимодействия приобретает вид

$$U_{вз} = -\frac{\alpha}{R_{12}}. \qquad (3.64)$$

В соответствии с (3.53) для того, чтобы удалить частицы друг от друга от расстояния R_{12} до бесконечно большого расстояния, не изменяя при этом их скоростей, требуется совершить работу

$$A_{внешн} = U_{вз_\infty} - U_{вз}(R_{12}).$$

Подстановка соответствующих значений функции (3.64) приводит к выражению

$$A_{\text{внешн}} = 0 - \left(-\frac{\alpha}{R_{12}}\right) = \frac{\alpha}{R_{12}}. \qquad (3.65)$$

В случае притяжения между частицами $\alpha > 0$; соответственно для удаления частиц друг от друга требуется совершить положительную работу.

В случае отталкивания частиц друг от друга $\alpha < 0$ и работа (3.65) оказывается отрицательной. Эту работу приходится совершать, чтобы воспрепятствовать отталкивающимся частицам увеличить скорость своего движения.

3.7. Закон сохранения энергии

Сведем вместе результаты, полученные в предыдущих параграфах. Рассмотрим систему, состоящую из N частиц с массами $m_1, m_2, \ldots, m_N$. Пусть частицы взаимодействуют друг с другом с силами $\mathbf{F}_{ik}$, модули которых зависят только от расстояния R_{ik} между частицами. В предыдущем параграфе мы установили, что такие силы являются консервативными. Это означает, что работа, совершаемая этими силами над частицами, определяется начальной и конечной конфигурациями системы. Предположим, что, кроме внутренних сил, на i-ю частицу действуют внешняя консервативная сила $\mathbf{F}_i$ и внешняя неконсервативная сила $\mathbf{F}_i^*$. Тогда уравнение движения i-й частицы будет иметь вид

$$m_i\dot{\mathbf{v}}_i = \sum_{\substack{k=1\\(k\neq i)}}^{N} \mathbf{F}_{ik} + \mathbf{F}_i + \mathbf{F}_i^* \quad (i = 1, 2, \ldots, N) \qquad (3.66)$$

Умножив i-е уравнение на $d\mathbf{s}_i = d\mathbf{r}_i = \mathbf{v}_i\,dt$ и сложив вместе все N уравнений, получим

$$\sum_{i=1}^{N} m_i\mathbf{v}_i\,d\mathbf{v}_i = \sum_{i=1}^{N}\left\{\sum_{\substack{k=1\\(k\neq i)}}^{N} \mathbf{F}_{ik}\right\} d\mathbf{r}_i + \sum_{i=1}^{N}\mathbf{F}_i\,d\mathbf{s}_i + \sum_{i=1}^{N}\mathbf{F}_i^*\,d\mathbf{s}_i. \qquad (3.67)$$

Левая часть представляет собой приращение кинетической энергии системы:

$$\sum_{i=1}^{N} m_i \mathbf{v}_i \, d\mathbf{v}_i = d\sum_{i=1}^{N} \frac{m_i v_i^2}{2} = dT \tag{3.68}$$

(см. (3.3)). Из формул (3.54)–(3.59) следует, что первый член правой части (3.67) равен убыли потенциальной энергии взаимодействия частиц:

$$\sum_{i=1}^{N}\left\{\sum_{\substack{k=1\\(k\neq i)}}^{N} \mathbf{F}_{ik}\right\} d\mathbf{r}_i = -\sum_{(i<k)} \mathbf{F}_{ik} \, d\mathbf{R}_{ik} =$$

$$= -d\sum_{(i<k)} U_{ik}(R_{ik}) = -dU_{вз}. \tag{3.69}$$

Согласно (3.26) второй член в (3.67) равен убыли потенциальной энергии системы во внешнем поле консервативных сил:

$$\sum_{i=1}^{N} \mathbf{F}_i \, d\mathbf{s}_i = -d\sum_{i=1}^{N} U_i(\mathbf{r}_i) = -dU_{внешн}. \tag{3.70}$$

Наконец, последний член в (3.67) представляет собой работу неконсервативных внешних сил:

$$\sum_{i=1}^{N} \mathbf{F}_i^* \, d\mathbf{s}_i = \sum_{i=1}^{N} dA_i^* = dA^*_{внешн}. \tag{3.71}$$

Приняв во внимание формулы (3.68)–(3.71), представим соотношение (3.67) следующим образом:

$$d(T + U_{вз} + U_{внешн}) = dA^*_{внешн}. \tag{3.72}$$

Величина

$$E = T + U_{вз} + U_{внешн}. \tag{3.73}$$

есть полная механическая энергия системы. Если внешние неконсервативные силы отсутствуют, правая часть

формулы (3.72) будет равна нулю и, следовательно, полная энергия системы остается постоянной:

$$E = T + U_{\text{вз}} + U_{\text{внешн}} = \text{const} \tag{3.74}$$

Таким образом, мы пришли к выводу, что *полная механическая энергия системы тел, на которые действуют лишь консервативные силы, остается постоянной.* В этом утверждении заключено существо одного из основных законов механики — закона сохранения механической энергии

Для замкнутой системы, т. е. системы, на тела которой не действуют никакие внешние силы, соотношение (3.74) имеет вид

$$E = T + U_{\text{вз}} = \text{const}. \tag{3.75}$$

В этом случае закон сохранения энергии формулируется следующим образом: *полная механическая энергия замкнутой системы тел, между которыми действуют только консервативные силы, остается постоянной.*

Если в замкнутой системе, кроме консервативных, действуют также неконсервативные силы, например силы трения, то полная механическая энергия системы не сохраняется. Рассматривая неконсервативные силы как внешние, можно в соответствии с (3.72) написать

$$dE = d(T + U_{\text{вз}}) = dA_{\text{неконсерв}}. \tag{3.76}$$

Проинтегрировав это соотношение, получим

$$E_2 - E_1 = A_{12\,\text{неконсерв}}. \tag{3.77}$$

Закон сохранения энергии для системы невзаимодействующих частиц был сформулирован в § 3.5 (см. текст, следующий за формулой (3 39))

3.8. Энергия упругой деформации

Потенциальной энергией может обладать не только система взаимодействующих тел, но и отдельно взятое упруго деформированное тело (например, сжатая пружина, растянутый стержень и т. п.). В этом случае потенциальная энергия зависит от взаимного расположения отдельных частей тела (например, от расстояния между соседними витками пружины).

Согласно формуле (3.13) как для растяжения, так и для сжатия пружины на длину x необходимо затратить работу $A = kx^2/2$. Эта работа идет на увеличение потенциальной энергии пружины. Следовательно, зависимость потенциальной энергии пружины от удлинения x имеет вид

$$U = \frac{kx^2}{2}, \tag{3.78}$$

где k — жесткость пружины (см. § 2.9). Формула (3.78) написана в предположении, что потенциальная энергия недеформированной пружины равна нулю. На рис. 3.13 показан график зависимости U от x.

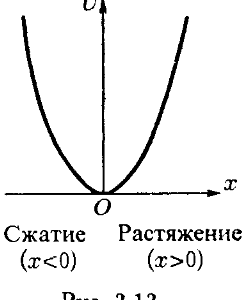


Рис. 3.13

При упругой продольной деформации стержня совершается работа, определяемая формулой (3.14). В соответствии с этим потенциальная энергия упруго деформированного стержня равна

$$U = \frac{E\varepsilon^2}{2}V. \tag{3.79}$$

Здесь E — модуль Юнга, ε — относительное удлинение, V — объем стержня.

Введем в рассмотрение плотность энергии упругой деформации u, которую определим как отношение энергии dU к тому объему dV, в котором она заключена:

$$u = \frac{dU}{dV}. \tag{3.80}$$

Поскольку стержень предполагается однородным и деформация является равномерной, т. е. одинаковой в разных точках стержня, энергия (3.79) распределена в стержне также равномерно. Поэтому можно считать, что

$$u = \frac{U}{V} = \frac{E\varepsilon^2}{2}. \tag{3.81}$$

Это выражение дает плотность энергии упругой деформации при растяжении (или сжатии) и в том случае, когда деформация неравномерна. В последнем случае для нахождения плотности энергии в некоторой точке стержня нужно подставлять в (3.81) значение ε в данной точке.

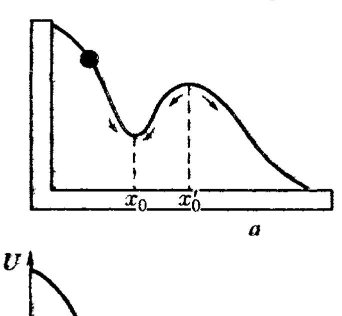
Исходя из формул (2.28)–(2.30), нетрудно получить, что плотность энергии упругой деформации при сдвиге равна

$$u = G\gamma^2/2, \tag{3.82}$$

где G — модуль сдвига, а γ — относительный сдвиг.

3.9. Условия равновесия механической системы

Рассмотрим материальную точку, движение которой ограничено таким образом, что она имеет лишь одну степень свободы[8]). Это означает, что ее положение может быть определено с помощью одной величины, например координаты x. В качестве примера можно привести шарик, скользящий без трения по укрепленной неподвижно, изогнутой в вертикальной плоскости проволоке (см. рис. 3.14 *а*). Другим примером может служить прикрепленный к концу пружины шарик, скользящий без трения по горизонтальной направляющей (рис. 3.15 *а*). На шарик действует консервативная сила: в первом случае это сила тяжести, во втором — упругая сила деформированной пружины. Графики потенциальной энергии $U(x)$ показаны на рис. 3.14 *б* и 3.15 *б*.



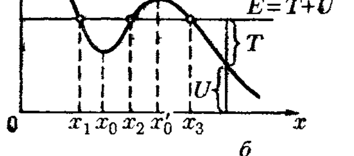


Рис. 3.14

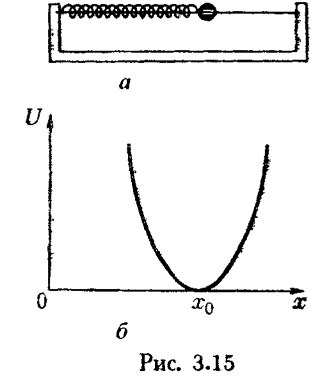


Рис. 3.15

[8]) Числом степеней свободы механической системы называется количество независимых величин, с помощью которых может быть задано положение системы. Подробнее об этом будет сказано в § 4.3.

Поскольку шарики движутся по проволоке без трения, сила, с которой проволока действует на шарик, в обоих случаях перпендикулярна к скорости шарика и, следовательно, работы над шариком не совершает. Поэтому имеет место сохранение энергии:

$$E = T + U = \text{const} \tag{3.83}$$

Из (3.83) следует, что кинетическая энергия может возрастать только за счет уменьшения потенциальной энергии. Поэтому если шарик находится в таком состоянии, что его скорость равна нулю, а потенциальная энергия имеет минимальное значение, то без воздействия извне он не сможет прийти в движение, т. е. будет находиться в равновесии.

Минимумам U соответствуют на графиках значения x, равные x_0 (на рис. 3 15 x_0 есть длина недеформированной пружины). Условие минимума потенциальной энергии имеет вид

$$\frac{dU}{dx} = 0. \tag{3.84}$$

В соответствии с (3.29) условие (3.84) равнозначно условию

$$F_x = 0 \tag{3.85}$$

(в случае, когда U является функцией только одной переменной, $\partial U/\partial x = dU/dx$). Таким образом, положение, соответствующее минимуму потенциальной энергии, обладает тем свойством, что сила, действующая на тело, равна нулю.

В случае, изображенном на рис. 3.14, условия (3.84) и (3.85) выполняются также для x, равного x_0' (т. е. для максимума U). Определяемое этим значением x положение шарика также будет равновесным. Однако это равновесие в отличие от равновесия при $x = x_0$ будет неустойчивым: достаточно слегка вывести шарик из этого положения, как возникает сила, которая будет удалять шарик от положения x_0'. Силы, возникающие при смещении шарика из положения устойчивого равновесия (для которого $x = x_0$), направлены так, что стремятся вернуть шарик в положение равновесия.

Зная вид функции, которой выражается потенциальная энергия, можно сделать ряд заключений о характере движения частицы. Поясним это, воспользовавшись гра-

фиком, изображенным на рис. 3.14 *б*. Если полная энергия имеет значение, указанное на рисунке, то частица может совершать движение либо в пределах от x_1 до x_2, либо в пределах от x_3 до бесконечности. В области $x < x_1$ и $x_2 < x < x_3$ частица проникнуть не может, так как потенциальная энергия не может стать больше полной энергии (если бы это случилось, то кинетическая энергия стала бы отрицательной). Таким образом, область $x_2 < x < x_3$, представляет собой потенциальный барьер, через который частица не может проникнуть, имея данный запас полной энергии. Область $x_1 < x < x_2$ называется потенциальной ямой.

Если частица при своем движении не может удалиться на бесконечность, движение называется финитным. Если же частица может уходить сколь угодно далеко, движение называют инфинитным. Частица в потенциальной яме совершает финитное движение. Финитным будет также движение частицы с отрицательной полной энергией в центральном поле сил притяжения (предполагается, что потенциальная энергия обращается в нуль на бесконечности).

3.10. Закон сохранения импульса

В предыдущих параграфах был рассмотрен аддитивный интеграл движения, называемый энергией. Найдем еще одну аддитивную сохраняющуюся для замкнутой системы величину. С этой целью рассмотрим систему N взаимодействующих частиц. Пусть, кроме внутренних сил $\mathbf{F}_{ik}$, на i-ю частицу действуют внешние силы, результирующая которых равна $\mathbf{F}_i$. Напишем уравнение (2.8) для всех N частиц:

$$\dot{\mathbf{p}}_1 = \mathbf{F}_{12} + \mathbf{F}_{13} + \ldots + \mathbf{F}_{1k} + \ldots \\ \ldots + \mathbf{F}_{1N} + \mathbf{F}_1 = \sum_{k=2}^{N} \mathbf{F}_{1k} + \mathbf{F}_1,$$

$$\dot{\mathbf{p}}_2 = \mathbf{F}_{21} + \mathbf{F}_{23} + \ldots + \mathbf{F}_{2k} + \ldots \\ \ldots + \mathbf{F}_{2N} + \mathbf{F}_2 = \sum_{\substack{k=1 \\ (k\neq 2)}}^{N} \mathbf{F}_{2k} + \mathbf{F}_2,$$

. . . .

$$\dot{\mathbf{p}}_i = \mathbf{F}_{i1} + \mathbf{F}_{i2} + \ldots + \mathbf{F}_{ik} + \ldots \\ \ldots + \mathbf{F}_{iN} + \mathbf{F}_i = \sum_{\substack{k=1 \\ (k \neq i)}}^{N} \mathbf{F}_{ik} + \mathbf{F}_i,$$

. . . .

$$\dot{\mathbf{p}}_N = \mathbf{F}_{N1} + \mathbf{F}_{N2} + \ldots + \mathbf{F}_{Nk} + \ldots \\ \ldots + \mathbf{F}_{N,N-1} + \mathbf{F}_N = \sum_{k=1}^{N-1} \mathbf{F}_{Nk} + \mathbf{F}_N.$$

Сложим вместе эти N уравнений. Вследствие того, что $\mathbf{F}_{12} + \mathbf{F}_{21} = 0$ и т. д., справа останутся только внешние силы.

Таким образом, мы приходим к соотношению

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 + \ldots + \mathbf{p}_N) = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 + \ldots + \mathbf{F}_N = \sum_{i=1}^{N} \mathbf{F}_i. \quad (3.86)$$

Сумма импульсов частиц, образующих механическую систему, называется **импульсом системы**. Обозначив этот импульс символом $\mathbf{p}$, получим, что

$$\mathbf{p} = \sum_{i=1}^{N} \mathbf{p}_i = \sum_{i=1}^{N} m_i \mathbf{v}_i. \quad (3.87)$$

Из (3.87) следует, что импульс является аддитивной величиной.

Запишем соотношение (3.86) в виде

$$\frac{d}{dt}\mathbf{p} = \sum_{i=1}^{N} \mathbf{F}_i. \quad (3.88)$$

Отсюда вытекает, что при отсутствии внешних сил $d\mathbf{p}/dt = 0$. Следовательно, для замкнутой системы $\mathbf{p}$ постоянен. Это утверждение составляет содержание **закона сохранения импульса**, который формулируется следующим образом: *импульс замкнутой системы материальных точек остается постоянным.*

Отметим, что импульс остается постоянным и для незамкнутой системы при условии, что внешние силы в сумме дают нуль (см. (3.88)). В случае, когда сумма внешних

сил не равна нулю, но проекция этой суммы на некоторое направление есть нуль, сохраняется составляющая импульса в этом направлении. Действительно, спроецировав все величины уравнения (3.88) на некоторое направление x, получим, что

$$\frac{d}{dt}p_x = \sum_{i=1}^{N} F_{xi}, \tag{3.89}$$

откуда и вытекает высказанное нами утверждение. (Напомним, что $(d\mathbf{p}/dt)_{\text{пр}\,x} = dp_x/dt$; см. формулу (1.40)).

Центром масс (или центром инерции) системы называется точка C, положение которой задается радиусом-вектором $\mathbf{r}_C$, определяемым следующим образом:

$$\mathbf{r}_C = \frac{m_1\mathbf{r}_1 + m_2\mathbf{r}_2 + \ldots + m_N\mathbf{r}_N}{m_1 + m_2 + \ldots + m_N} = \frac{\sum m_i\mathbf{r}_i}{\sum m_i} = \frac{\sum m_i\mathbf{r}_i}{m}. \tag{3.90}$$

Здесь m_i — масса i-й частицы, $\mathbf{r}_i$ — радиус-вектор, определяющий положение этой частицы, m — масса системы.

Декартовы координаты центра масс равны проекциям $\mathbf{r}_C$ на координатные оси:

$$x_C = \frac{\sum m_i x_i}{m}, \quad y_C = \frac{\sum m_i y_i}{m}, \quad z_C = \frac{\sum m_i z_i}{m}. \tag{3.91}$$

Отметим, что в однородном поле сил тяжести центр масс совпадает с центром тяжести системы.

Импульс системы частиц может быть представлен в виде произведения суммарной массы частиц на скорость центра масс системы:

$$\mathbf{p} = m\mathbf{v}_C. \tag{3.92}$$

Скорость центра масс получается путем дифференцирования радиуса-вектора (3.90) по времени:

$$\mathbf{v}_C = \dot{\mathbf{r}}_C = \frac{\sum m_i\dot{\mathbf{r}}_i}{m} = \frac{\sum m_i\mathbf{v}_i}{m} = \frac{\mathbf{p}}{m}$$

(см. (3.87)). Отсюда вытекает формула (3.92).

Для замкнутой системы $\mathbf{p} = m\mathbf{v}_C = \text{const}$. Следовательно, центр масс замкнутой системы либо движется прямолинейно и равномерно, либо остается неподвижным.

Система отсчета, в которой центр масс покоится, называется *системой центра масс* или ц-системой. Эта система, очевидно, инерциальна.

Система отсчета, связанная с измерительными приборами, называется *лабораторной* или л-системой.

3.11. Соударение двух тел

При соударении тел друг с другом они претерпевают деформации. При этом кинетическая энергия, которой обладали тела перед ударом, частично или полностью переходит в потенциальную энергию упругой деформации и в так называемую внутреннюю энергию тел. Увеличение внутренней энергии тел сопровождается повышением их температуры.

Существует два предельных вида удара: *абсолютно упругий* и *абсолютно неупругий*. Абсолютно упругим называется такой удар, при котором механическая энергия тел не переходит в другие, немеханические, виды энергии. При таком ударе кинетическая энергия переходит полностью или частично в потенциальную энергию упругой деформации. Затем тела возвращаются к первоначальной форме, отталкивая друг друга. В итоге потенциальная энергия упругой деформации снова переходит в кинетическую энергию, и тела разлетаются со скоростями, модуль и направление которых определяются двумя условиями — сохранением полной энергии и сохранением полного импульса системы тел.

Абсолютно неупругий удар характеризуется тем, что потенциальной энергии деформации не возникает; кинетическая энергия тел полностью или частично превращается во внутреннюю энергию; после удара столкнувшиеся тела либо движутся с одинаковой скоростью, либо покоятся. При абсолютно неупругом ударе выполняется лишь закон сохранения импульса, закон же сохранения механической энергии не соблюдается: имеет место закон сохранения суммарной энергии различных видов — механической и внутренней.

Рассмотрим вначале абсолютно неупругий удар двух частиц (материальных точек), образующих замкнутую систему. Пусть массы частиц равны m_1 и m_2, а скорости до

удара $\mathbf{v}_{10}$ и $\mathbf{v}_{20}$. В силу закона сохранения суммарный импульс частиц после удара должен быть таким же, как и до удара:

$$m_1\mathbf{v}_{10} + m_2\mathbf{v}_{20} = m_1\mathbf{v} + m_2\mathbf{v} = (m_1 + m_2)\mathbf{v} \quad (3.93)$$

($\mathbf{v}$ — одинаковая для обеих частиц скорость после удара). Из (3.93) следует, что

$$\mathbf{v} = \frac{m_1\mathbf{v}_{10} + m_2\mathbf{v}_{20}}{m_1 + m_2}. \quad (3.94)$$

Для практических расчетов нужно спроецировать соотношение (3.94) на соответствующим образом выбранные направления.

Теперь рассмотрим абсолютно упругий удар, причем ограничимся случаем центрального удара двух однородных шаров. Удар называется центральным, если шары до удара движутся вдоль прямой, проходящей через их центры. При центральном ударе соударение может произойти, если: 1) шары движутся навстречу друг другу (рис. 3.16 *а*) и 2) один из шаров догоняет другой (рис. 3.16 *б*).

Рис. 3.16

Будем предполагать, что шары образуют замкнутую систему или что внешние силы, приложенные к шарам, уравновешивают друг друга. Кроме того, будем считать, что вращение шаров отсутствует.

Обозначим массы шаров m_1 и m_2, скорости шаров до удара $\mathbf{v}_{10}$ и $\mathbf{v}_{20}$ и, наконец, скрости после удара $\mathbf{v}_1$ и $\mathbf{v}_2$. Напишем уравнения сохранения энергии и импульса:

$$\frac{m_1\mathbf{v}_{10}^2}{2} + \frac{m_2\mathbf{v}_{20}^2}{2} = \frac{m_1\mathbf{v}_1^2}{2} + \frac{m_2\mathbf{v}_2^2}{2}. \quad (3.95)$$

$$m_1\mathbf{v}_{10} + m_2\mathbf{v}_{20} = m_1\mathbf{v}_1 + m_2\mathbf{v}_2. \quad (3.96)$$

Учтя, что $\mathbf{a}^2 - \mathbf{b}^2 = (\mathbf{a} - \mathbf{b})(\mathbf{a} + \mathbf{b})$, приведем (3.95) к виду

$$m_1(\mathbf{v}_{10} - \mathbf{v}_1)(\mathbf{v}_{10} + \mathbf{v}_1) = m_2(\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_{20})(\mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_{20}). \quad (3.97)$$

Соотношение (3.96) преобразуем следующим образом:

$$m_1(\mathbf{v}_{10} - \mathbf{v}_1) = m_2(\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_{20}). \qquad (3.98)$$

Из соображений симметрии можно утверждать, что скорости шаров после удара будут направлены вдоль той же прямой, вдоль которой двигались центры шаров перед ударом. Следовательно, все векторы в (3.97) и (3.98) коллинеарны. Для коллинеарных векторов $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ из $\mathbf{ab} = \mathbf{ac}$ следует, что $\mathbf{b} = \mathbf{c}$. Поэтому, сопоставив (3.97) и (3.98), можно заключить, что

$$\mathbf{v}_{10} + \mathbf{v}_1 = \mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_{20}. \qquad (3.99)$$

Умножив (3.99) на m_2 и вычтя результат из (3.98), а затем умножив (3.99) на m_1 и сложив результат с (3.98), получим скорости шаров после удара:

$$\mathbf{v}_1 = \frac{2m_2\mathbf{v}_{20} + (m_1 - m_2)\mathbf{v}_{10}}{m_1 + m_2}, \qquad \mathbf{v}_2 = \frac{2m_1\mathbf{v}_{10} + (m_2 - m_1)\mathbf{v}_{20}}{m_1 + m_2}. \qquad (3.100)$$

Для численных расчетов нужно спроецировать соотношения (3.100) на ось x, вдоль которой движутся шары (см. рис. 3.16).

Отметим, что скорости шаров после абсолютно упругого удара не могут быть одинаковыми. В самом деле, приравняв друг другу выражения (3.100) для $\mathbf{v}_1$ и $\mathbf{v}_2$ и произведя преобразования, получим

$$\mathbf{v}_{10} = \mathbf{v}_{20}.$$

Следовательно, для того чтобы скорости шаров после удара оказались одинаковыми, необходимо, чтобы они были одинаковыми и до удара, но в этом случае соударение не может произойти. Отсюда следует, что условие равенства скоростей шаров после удара несовместимо с законом сохранения энергии. Итак, при неупругом ударе механическая энергия не сохраняется — она частично переходит во внутреннюю энергию соударяющихся тел, что приводит к их нагреву.

Рассмотрим случай, когда массы соударяющихся шаров равны: $m_1 = m_2$. Из (3.100) следует, что при этом условии

$$\mathbf{v}_1 = \mathbf{v}_{20}, \quad \mathbf{v}_2 = \mathbf{v}_{10},$$

т. е. шары при соударении обмениваются скоростями. В частности, если один из шаров одинаковой массы, например второй, до соударения покоится, то после удара он движется с такой же скоростью, какую имел первоначально первый шар, первый же шар после удара оказывается неподвижным.

С помощью формул (3.100) можно определить скорость шара после упругого удара о неподвижную или движущуюся стенку (которую можно рассматривать как шар бесконечно большой массы m_2 и бесконечно большого радиуса). Деля числитель и знаменатель выражений (3.100) на m_2 и пренебрегая членами, содержащими множитель m_1/m_2, получаем

$$\mathbf{v}_1 = 2\mathbf{v}_{20} - \mathbf{v}_{10}, \quad \mathbf{v}_2 = \mathbf{v}_{20}.$$

Как следует из полученного результата, скорость стенки остается неизменной. Скорость же шара, если стенка неподвижна ($\mathbf{v}_{20} = 0$), меняет направление на противоположное; в случае движущейся стенки изменяется также модуль скорости шара (возрастает на $2v_{20}$, если стенка движется навстречу шару, и убывает на $2v_{20}$, если стенка «уходит» от догоняющего ее шара).

3.12. Закон сохранения момента импульса

Мы знаем уже две аддитивные сохраняющиеся величины: энергию и импульс. Теперь найдем третью такую величину. Для этого рассмотрим систему, состоящую из двух взаимодействующих частиц, на которые действуют также внешние силы (рис. 3.17). Уравнения движения частиц имеют вид

$$m_1\dot{\mathbf{v}}_1 = \mathbf{F}_{12}+\mathbf{F}_1, \quad m_2\dot{\mathbf{v}}_2 = \mathbf{F}_{21}+\mathbf{F}_2.$$

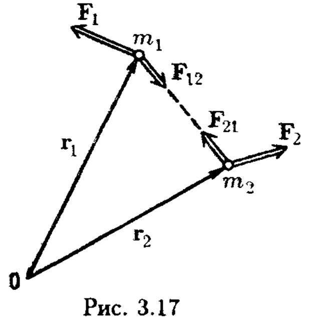


Рис. 3.17

Умножим векторно слева первое уравнение на радиус-вектор первой частицы $\mathbf{r}_1$, а второе — на радиус-вектор второй частицы $\mathbf{r}_2$:

$$m_1[\mathbf{r}_1\dot{\mathbf{v}}_1] = [\mathbf{r}_1\mathbf{F}_{12}] + [\mathbf{r}_1\mathbf{F}_1],$$
$$m_2[\mathbf{r}_2\dot{\mathbf{v}}_2] = [\mathbf{r}_2\mathbf{F}_{21}] + [\mathbf{r}_2\mathbf{F}_2]. \quad (3.101)$$

Векторное произведение вида $[\mathbf{r}\dot{\mathbf{v}}]$ эквивалентно выражению $(d/dt)[\mathbf{rv}]$. Действительно, согласно формуле (1.55)

$$\frac{d}{dt}[\mathbf{rv}] = [\mathbf{r}\dot{\mathbf{v}}] + [\dot{\mathbf{r}}\mathbf{v}] = [\mathbf{r}\dot{\mathbf{v}}], \qquad (3.102)$$

так как $[\dot{\mathbf{r}}\mathbf{v}] = [\mathbf{vv}] = 0$. Произведя такую замену в формулах (3.101) и учтя, что $\mathbf{F}_{21} = -\mathbf{F}_{12}$, придем к уравнениям

$$\begin{aligned} m_1\frac{d}{dt}[\mathbf{r}_1\mathbf{v}_1] &= [\mathbf{r}_1\mathbf{F}_{12}] + [\mathbf{r}_1\mathbf{F}_1],\\ m_2\frac{d}{dt}[\mathbf{r}_2\mathbf{v}_2] &= -[\mathbf{r}_2\mathbf{F}_{12}] + [\mathbf{r}_2\mathbf{F}_2]. \end{aligned} \qquad (3.103)$$

Масса есть постоянная скалярная величина. Поэтому ее можно внести под знак производной по времени и в векторное произведение:

$$m\frac{d}{dt}[\mathbf{rv}] = \frac{d}{dt}[\mathbf{r}(m\mathbf{v})] = \frac{d}{dt}[\mathbf{rp}].$$

Приняв это во внимание, сложим почленно уравнения (3.103). В результате получим

$$\frac{d}{dt}\{[\mathbf{r}_1\mathbf{p}_1] + [\mathbf{r}_2\mathbf{p}_2]\} = [(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)\mathbf{F}_{12}] + [\mathbf{r}_1\mathbf{F}_1] + [\mathbf{r}_2\mathbf{F}_2].$$

Векторы $\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$ и $\mathbf{F}_{12}$ коллинеарны, поэтому их векторное произведение равно нулю. Таким образом, мы приходим к соотношению

$$\frac{d}{dt}\{[\mathbf{r}_1\mathbf{p}_1] + [\mathbf{r}_2\mathbf{p}_2]\} = [\mathbf{r}_1\mathbf{F}_1] + [\mathbf{r}_2\mathbf{F}_2]. \qquad (3.104)$$

Если система замкнута, правая часть этого соотношения равна нулю и, следовательно,

$$[\mathbf{r}_1\mathbf{p}_1] + [\mathbf{r}_2\mathbf{p}_2] = \text{const}.$$

Мы пришли к аддитивной сохраняющейся величине, которую называют **моментом импульса**[9]) относительно точки O (см. рис. 3.17).

[9]) Устаревшее название этой величины — момент количества движения.

Для отдельно взятой частицы **моментом импульса относительно точки** O называется псевдовектор

$$\mathbf{M} = [\mathbf{rp}] = [\mathbf{r}(m\mathbf{v})]. \tag{3.105}$$

Моментом импульса системы относительно точки O называется векторная сумма моментов импульсов частиц, входящих в систему:

$$\mathbf{M} = \sum_i \mathbf{M}_i = \sum_i [\mathbf{r}_i \mathbf{p}_i]. \tag{3.106}$$

Проекция вектора (3.105) на некоторую ось z называется **моментом импульса частицы относительно этой оси**:

$$M_z = [\mathbf{rp}]_{\text{пр}\,z}. \tag{3.107}$$

Аналогично **моментом импульса системы относительно оси** z называется величина

$$M_z = \sum_i [\mathbf{r}_i \mathbf{p}_i]_{\text{пр}\,z}. \tag{3.108}$$

Из рис. 3.18 видно, что модуль вектора момента импульса частицы равен

$$M = rp\sin\alpha = lp, \tag{3.109}$$

где $l = r\sin\alpha$ — длина перпендикуляра, опущенного из точки O на прямую, вдоль которой направлен импульс частицы. Эта длина называется **плечом импульса относительно точки** O. Рисунок 3.18 выполнен

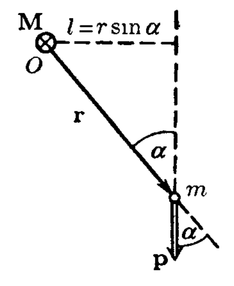


Рис. 3.18

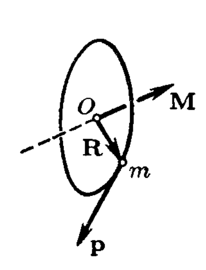


Рис. 3.19

в предположении, что точка O, относительно которой берется момент, и вектор $\mathbf{p}$ лежат в плоскости рисунка. Вектор $\mathbf{M}$ перпендикулярен к плоскости рисунка и направлен «от нас».

Рассмотрим два характерных примера.

1. Пусть частица движется вдоль прямой, изображенной на рис. 3.18 штриховой линией. В этом случае момент импульса частицы может изменяться только по модулю. Модуль момента равен

$$M = mvl, \tag{3.110}$$

причем плечо l остается неизменным.

2. Частица массы m движется по окружности радиуса R (рис. 3.19). Момент импульса частицы относительно центра окружности O равен по модулю

$$M = mvR. \tag{3.111}$$

Вектор $\mathbf{M}$ перпендикулярен к плоскости окружности, причем направление движения частицы и вектор $\mathbf{M}$ образуют правовинтовую систему. Поскольку плечо, равное R, остается постоянным, момент импульса может изменяться только за счет изменения модуля скорости. При равномерном движении частицы по окружности момент импульса остается постоянным и по модулю, и по направлению.

Псевдовектор

$$\mathbf{N} = [\mathbf{rF}] \tag{3.112}$$

называется **моментом силы** $\mathbf{F}$ **относительно точки** O, из которой проводится радиус-вектор $\mathbf{r}$ точки приложения силы (рис. 3.20). Из рисунка видно, что модуль момента силы можно представить следующим образом:

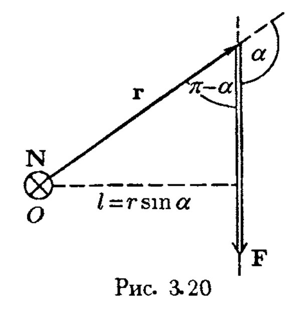


Рис. 3.20

$$N = rF\sin\alpha = lF, \tag{3.113}$$

где $l = r\sin\alpha$ — **плечо силы относительно точки** O (т. е. длина перпендикуляра, опущенного из точки O на прямую, вдоль которой действует сила).

Проекция вектора $\mathbf{N}$ на некоторую ось z, проходящую через точку O, относительно которой определен псевдовектор $\mathbf{N}$, называется **моментом силы относительно**

этой оси:

$$N_z = [\mathbf{rF}]_{\text{пр}\, z}. \qquad (3.114)$$

Разложим вектор силы $\mathbf{F}$ (рис. 3.21) на три взаимно перпендикулярные составляющие: $\mathbf{F}_{\parallel}$ — параллельную оси z, $\mathbf{F}_R$ — перпендикулярную к оси z и действующую вдоль прямой, проходящей через ось, и, наконец, $\mathbf{F}_\tau$ — перпендикулярную к плоскости, проходящей через ось и точку приложения силы (эта составляющая обозначена на рисунке кружком с крестиком). Если представить себе окружность радиуса R с центром на оси z, то составляющая $\mathbf{F}_\tau$ будет направлена по касательной к этой окружности. Момент силы $\mathbf{F}$ относительно точки O равен сумме моментов составляющих: $\mathbf{N} = \mathbf{N}_{\parallel} + \mathbf{N}_R + \mathbf{N}_\tau$. Векторы $\mathbf{N}_{\parallel}$ и $\mathbf{N}_R$ перпендикулярны к оси z; поэтому их проекции на ось z равны нулю. Момент $\mathbf{N}_\tau$ имеет модуль, равный rF_τ, и образует с осью z угол α, косинус которого равен R/r. Следовательно, момент составляющей $\mathbf{F}_\tau$ относительно оси z имеет модуль $N_\tau \cos\alpha = RF_\tau$. Таким образом, момент силы $\mathbf{F}$ относительно оси z равен

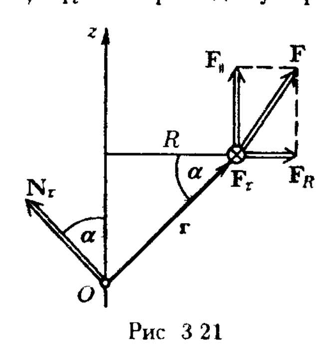


Рис 3 21

$$N_z = RF_\tau. \qquad (3.115)$$

До сих пор под F_τ мы понимали модуль составляющей $\mathbf{F}_\tau$. Однако $\mathbf{F}_\tau$ можно рассматривать как проекцию вектора $\mathbf{F}$ на орт τ, касательный к окружности радиуса R и направленный так, что движение по окружности в направлении τ образует с направлением оси z правовинтовую систему. При таком истолковании F_τ формула (3.115) будет определять и знак N_z.

Момент силы $\mathbf{N}$ характеризует способность силы вращать тело вокруг точки, относительно которой он берется. Заметим, что в том случае, когда тело может вращаться относительно точки O произвольным образом, под действием силы тело повернется вокруг оси, перпендикулярной к плоскости, в которой лежат сила и точка O, т. е. вокруг оси, совпадающей с направлением момента силы относительно данной точки.

Момент силы относительно оси z характеризует способность силы вращать тело вокруг этой оси. Составляющие $\mathbf{F}_{\parallel}$ и $\mathbf{F}_R$ не могут вызвать вращения вокруг оси z. Такой поворот может быть вызван только составляющей $\mathbf{F}_\tau$, причем эта составляющая тем успешнее осуществит поворот, чем больше ее плечо R.

Две равные по модулю противоположно направленные силы, не действующие вдоль одной прямой, называются **парой сил** (рис. 3.22). Расстояние l между прямыми, вдоль которых действуют силы, называется **плечом пары**. Суммарный момент образующих пару сил $\mathbf{F}_1$ и $\mathbf{F}_2$ равен

$$\mathbf{N} = [\mathbf{r}_1\mathbf{F}_1] + [\mathbf{r}_2\mathbf{F}_2].$$

Учтя, что $\mathbf{F}_1 = -\mathbf{F}_2$, можно написать:

$$\mathbf{N} = -[\mathbf{r}_1\mathbf{F}_2] + [\mathbf{r}_2\mathbf{F}_2] = [(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1)\mathbf{F}_2] = [\mathbf{r}_{12}\mathbf{F}_2], \quad (3.116)$$

где $\mathbf{r}_{12} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1$ — вектор, проведенный из точки приложения силы $\mathbf{F}_1$ в точку приложения силы $\mathbf{F}_2$. Выражение (3.116) не зависит от выбора точки O. Следовательно, момент пары сил относительно любой точки будет один и тот же. Вектор момента пары сил перпендикулярен к плоскости, в которой лежат силы (см. рис. 3.22), и численно равен произведению модуля любой из сил на плечо.

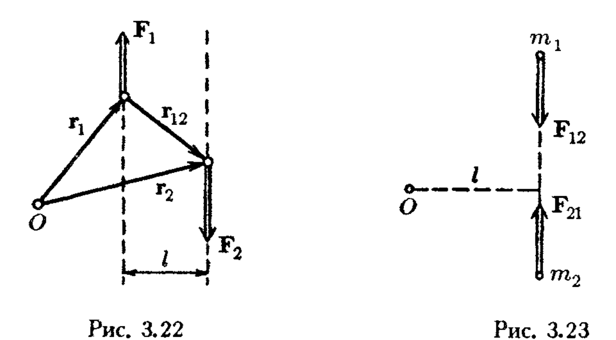


Рис. 3.22 Рис. 3.23

Силы взаимодействия между частицами действуют в противоположные стороны вдоль одной и той же прямой (рис. 3.23). Их моменты относительно произвольной точки O равны по модулю и противоположны по направлению. Поэтому моменты внутренних сил попарно уравновешивают друг друга, и сумма моментов всех внутренних

сил для любой системы частиц, в частности для твердого тела, всегда равна нулю:

$$\sum \mathbf{N}_{\text{внутр}} = 0. \tag{3.117}$$

В соответствии с определениями (3.106) и (3.112) уравнение (3.104) можно записать следующим образом:

$$\frac{d}{dt}\mathbf{M} = \sum \mathbf{N}_{\text{внешн}}. \tag{3.118}$$

Эта формула сходна с формулой (3.88). Из сравнения этих формул вытекает, что подобно тому, как производная по времени от импульса системы равна сумме внешних сил, производная по времени от момента импульса равна сумме моментов внешних сил.

Из (3.118) вытекает, что при отсутствии внешних сил $d\mathbf{M}/dt = 0$. Следовательно, для замкнутой системы вектор $\mathbf{M}$ постоянен. Это утверждение составляет содержание закона сохранения момента импульса, который формулируется следующим образом: *момент импульса замкнутой системы материальных точек остается постоянным.*

Мы доказали соотношение (3.118) для системы из двух частиц. Однако его легко обобщить на случай любого числа частиц. Напишем уравнения движения частиц:

$$m_1\dot{\mathbf{v}}_1 = \sum_k \mathbf{F}_{1k} + \mathbf{F}_1,$$

. . . .

$$m_i\dot{\mathbf{v}}_i = \sum_k \mathbf{F}_{ik} + \mathbf{F}_i,$$

. . . .

$$m_N\dot{\mathbf{v}}_N = \sum_k \mathbf{F}_{Nk} + \mathbf{F}_N.$$

Умножив каждое из уравнений на соответствующий радиус-вектор, получим (см. (3.102)):

$$\frac{d}{dt}[\mathbf{r}_1\mathbf{p}_1] = \sum_k [\mathbf{r}_1\mathbf{F}_{1k}] + [\mathbf{r}_1\mathbf{F}_1],$$

. . . .

$$\frac{d}{dt}[\mathbf{r}_i\mathbf{p}_i] = \sum_k [\mathbf{r}_i\mathbf{F}_{ik}] + [\mathbf{r}_i\mathbf{F}_i],$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\frac{d}{dt}[\mathbf{r}_N\mathbf{p}_N] = \sum_k [\mathbf{r}_N\mathbf{F}_{Nk}] + [\mathbf{r}_N\mathbf{F}_N]$$

Сложим почленно все N уравнений:

$$\frac{d}{dt} = \sum_i \mathbf{M}_i = \sum_{\substack{i,k \\ (i\neq k)}} [\mathbf{r}_i\mathbf{F}_{ik}] + \sum_i [\mathbf{r}_i\mathbf{F}_i].$$

Первая сумма в правой части представляет собой сумму моментов всех внутренних сил, которая, как мы показали, равна нулю (см. (3.117)). Вторая сумма справа есть сумма моментов внешних сил. Следовательно, мы пришли к формуле (3.118).

Отметим, что момент импульса остается постоянным и для незамкнутой системы при условии, что суммарный момент внешних сил равен нулю (см. (3.118)).

Спроецировав все величины, входящие в уравнение (3.118), на некоторое направление z, получим соотношение

$$\frac{d}{dt}M_z = \sum N_{z\,\text{внешн}}, \qquad (3.119)$$

согласно которому производная по времени от момента импульса системы относительно оси z равна сумме моментов внешних сил относительно этой оси.

Из (3.119) следует, что в том случае, когда сумма моментов внешних сил относительно некоторой оси равна нулю, момент импульса системы относительно этой оси остается постоянным.

В заключение отметим, что без указания точки или оси, относительно которых определяется момент, понятия момента импульса и момента силы утрачивают смысл.

3.13. Движение в центральном поле сил

Рассмотрим частицу, находящуюся в центральном поле сил. Напомним, что направление силы, действующей на частицу в любой точке такого поля, проходит через точку O — центр поля, а модуль силы зависит только от

расстояния до этого центра. Легко сообразить, что зависимость силы **F** от **r** имеет вид

$$\mathbf{F} = f(r)\,\mathbf{e}_r, \tag{3.120}$$

где $\mathbf{e}_r$ — орт радиуса-вектора (рис. 3.120), а $f(r)$ — проекция вектора силы на направление радиуса-вектора, т. е. F_r. Для силы отталкивания функция $f(r)$ положительна, для силы притяжения — отрицательна. Рисунок 3.24 выполнен для случая отталкивания частицы от силового центра. Формула (3.120), разумеется, справедлива только в том случае, если начало координат (т. е. точка, из которой проводятся радиусы-векторы) помещено в центр поля.

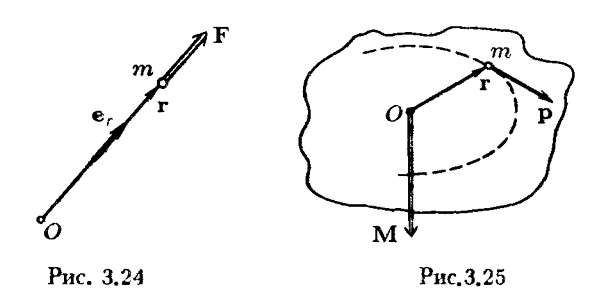


Рис. 3.24 Рис.3.25

Момент силы (3.120) относительно точки O, очевидно, равен нулю. Это следует из того, что плечо силы равно нулю. Отсюда в соответствии с (3.118) вытекает, что момент импульса частицы, движущейся в центральном поле сил, остается постоянным. Вектор $\mathbf{M} = [\mathbf{rp}]$ в каждый момент времени перпендикулярен к плоскости, образованной векторами **r** и **p** (рис. 3.25). Если $\mathbf{M} = \text{const}$, эта плоскость будет фиксированной. Таким образом, при движении частицы в центральном поле сил ее радиус-вектор остается все время в одной плоскости. В этой же плоскости лежит все время вектор **p**. Следовательно, траектория частицы представляет собой плоскую кривую. Плоскость, в которой лежит траектория, проходит через центр поля (см. рис. 3.25).

На рис. 3.26 изображен участок траектории частицы (вектор **M** направлен «на нас»). За время dt радиус-вектор частицы описывает заштрихованную площадь dS. Эта площадь равна половине площади параллелограмма, построенного на векторах **r** и $\mathbf{v}\,dt$. Последняя в свою очередь

равна модулю векторного произведения $[\mathbf{r}, \mathbf{v}\,dt]$ (см. текст, следующий за формулой (1.28)). Таким образом, площадь заштрихованного треугольника равна

$$dS = \frac{1}{2}\,|\,[\mathbf{rv}]\,|\,dt = \frac{1}{2m}\,|\,[\mathbf{rp}]\,|\,dt = \frac{1}{2m}M\,dt$$

(мы вынесли скалярный множитель dt за знак векторного произведения). Разделив обе части полученного соотношения на dt, получим, что

$$\frac{dS}{dt} = \frac{M}{2m}. \tag{3.121}$$

Величина dS/dt, т. е. площадь, описываемая радиус-вектором частицы в единицу времени, называется *секториальной скоростью*. В центральном поле сил $M = \mathrm{const}$, следовательно, и секториальная скорость частицы остается постоянной.

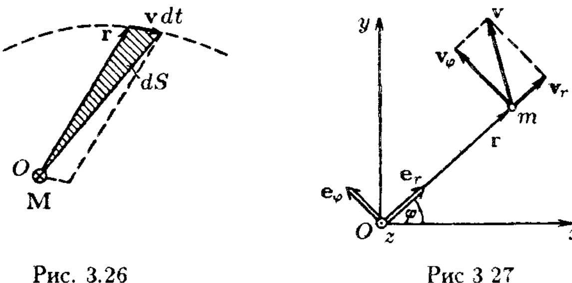


Рис. 3.26 Рис 3 27

Найдем выражение момента импульса частицы в полярных координатах r и φ (рис. 3.27). Согласно формулам (1.68)–(1.71) вектор скорости частицы можно представить в виде

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_r + \mathbf{v}_\varphi = \dot{r}\mathbf{e}_r + r\dot{\varphi}\mathbf{e}_\varphi. \tag{3.122}$$

Подставив это выражение в формулу для $\mathbf{M}$, получим

$$\mathbf{M} = m\,[\mathbf{rv}] = m\,[\mathbf{rv}_r] + m\,[\mathbf{rv}_\varphi].$$

Векторы $\mathbf{r}$ и $\mathbf{v}_r$ коллинеарны, поэтому первое слагаемое равно нулю. Следовательно,

$$\mathbf{M} = m\,[\mathbf{rv}_\varphi] = m\,[\mathbf{r}(r\dot{\varphi}\mathbf{e}_\varphi)] = mr\dot{\varphi}\,[\mathbf{re}_\varphi].$$

Векторное произведение $[\mathbf{r}\mathbf{e}_\varphi]$ равно $r\mathbf{e}_z$, где $\mathbf{e}_z$ — орт оси z (на рис. 3.27 этот орт направлен «на нас»). Таким образом,

$$\mathbf{M} = mr^2\dot{\varphi}\mathbf{e}_z. \tag{3.123}$$

Отсюда следует, что

$$M_z = mr^2\dot{\varphi}, \tag{3.124}$$

где M_z — проекция момента импульса на ось z. Модуль момента импульса равен модулю выражения (3.124).

Теперь обратимся к энергии частицы. Центральныесилы являются консервативными (см. § 3.4). Согласно (3.26) работа консервативной силы равна убыли потенциальной энергии частицы U. Поэтому для силы (3.120) имеет место соотношение $dA = -dU$, т. е.

$$dU = -dA = -f(r)\mathbf{e}_r\,d\mathbf{r} = -f(r)\,dr.$$

Проинтегрировав это соотношение, получим, что

$$U = -\int f(r)\,dr. \tag{3.125}$$

Из (3.125) следует, что потенциальная энергия частицы, находящейся в поле центральных сил, зависит только от расстояния до центра r: $U = U(r)$.

Особый интерес представляют силы, обратно пропорциональные квадрату расстояния от силового центра. Для них функция $f(r)$ в формуле (3.120) имеет вид

$$f(r) = \frac{\alpha}{r^2}, \tag{3.126}$$

где α — постоянная величина ($\alpha > 0$ соответствует случаю отталкивания от центра, $\alpha < 0$ — случаю притяжения к центру). К числу таких сил принадлежат гравитационные и кулоновские силы.

Подстановка функции (3.126) в выражение (3.125) дает

$$U = -\alpha\int\frac{dr}{r^2} = \frac{\alpha}{r} + C,$$

где C — постоянная интегрирования. Обычно условливаются считать потенциальную энергию на бесконечности (т. е. при $r = \infty$) равной нулю. При этом условии $C = 0$,

так что

$$U = \frac{\alpha}{r}. \tag{3.127}$$

Итак, полная механическая энергия частицы, движущейся в поле центральных сил, обратно пропорциональных квадрату расстояния, определяется выражением

$$E = \frac{mv^2}{2} + \frac{\alpha}{r}. \tag{3.128}$$

Заменив в соответствии с (3.122) квадрат скорости $\mathbf{v}$ суммой квадратов скоростей $\mathbf{v}_r$ и $\mathbf{v}_\varphi$, т. е. подставив вместо v^2 выражение $\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2$, получим, что

$$E = \frac{m\dot{r}^2}{2} + \frac{mr^2\dot{\varphi}^2}{2} + \frac{\alpha}{r}. \tag{3.129}$$

В центральном поле энергия и момент импульса частицы сохраняются. Следовательно, левые части формул (3.124) и (3.129) представляют собой константы. Таким образом, мы приходим к системе двух дифференциальных уравнений:

$$\begin{gathered} mr^2\dot{\varphi} = M_z = \text{const}, \\ m\dot{r}^2 + mr^2\dot{\varphi}^2 + \frac{2\alpha}{r} = 2E = \text{const}. \end{gathered} \tag{3.130}$$

Проинтегрировав эти уравнения, можно найти r и φ как функции от t, т. е. траекторию и характер движения частицы. Отметим, что в уравнения (3.130) входят первые производные по времени от r и φ. Поэтому их гораздо легче решить, чем уравнения, вытекающие из законов Ньютона, которые содержат вторые производные от координат.

Решение системы (3.130) выходит за рамки данной книги. Мы ограничимся тем, что приведем конечный результат. Траектория частицы представляет собой коническое сечение, т. е. эллипс, либо параболу, либо гиперболу. Какая из этих кривых наблюдается в данном конкретном случае, зависит от знака константы α и от полной энергии частицы.

В случае отталкивания (т. е. при $\alpha > 0$) траекторией частицы может быть только гипербола (рис 3.28). Если $M_z = 0$, гипербола вырождается в прямую, продолжение

которой проходит через силовой центр. Заметим, что при $\alpha > 0$ полная энергия (3.128) не может быть отрицательной

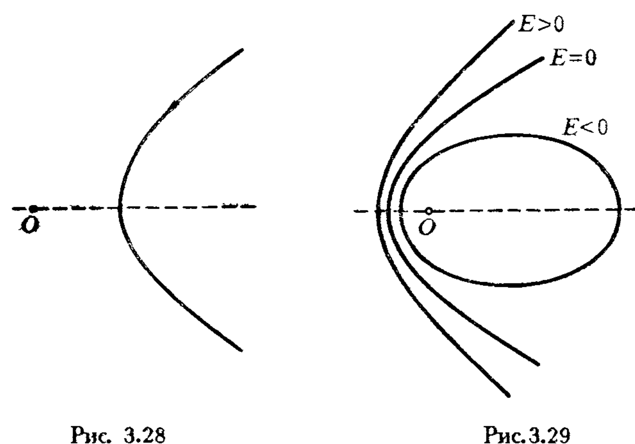


Рис. 3.28 Рис. 3.29

В случае притяжения (т. е. при $\alpha < 0$) полная энергия может быть как положительной, так и отрицательной; в частности, она может оказаться равной нулю. При $E > 0$ траектория оказывается гиперболой (рис. 3.29). При $E = 0$ траектория будет параболой. Этот случай осуществляется, если частица начинает свое движение из состояния покоя на бесконечности (см. (3.128)). Наконец, при $E < 0$ траекторией будет эллипс. При значениях энергии и момента импульса, удовлетворяющих условию $E = -m\alpha^2/2M^2$, эллипс вырождается в окружность.

Движение по эллипсу является **финитным**, движение по параболе и гиперболе — **инфинитным** (см. § 3.9).

3.14. Задача двух тел

Задачей двух тел называется задача о движении двух взаимодействующих частиц. Система, образованная частицами, предполагается замкнутой. В § 3.10 было выяснено, что центр масс замкнутой системы либо покоится, либо движется прямолинейно и равномерно. Будем решать задачу в системе центра масс (в ц-системе), поме-

стив начало координат в точку C. В этом случае

$$\mathbf{r}_C = \frac{m_1\mathbf{r}_1 + m_2\mathbf{r}_2}{m_1 + m_2} = 0,$$

т.е.

$$m_1\mathbf{r}_1 = -m_2\mathbf{r}_2 \qquad (3.131)$$

(рис. 3.30 *а*). Введем вектор

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1, \qquad (3.132)$$

определяющий положение второй частицы относительно первой (рис. 3.30 *б*). Решая совместно (3.131) и (3.132), легко найти, что

$$\mathbf{r}_1 = -\frac{m_2}{m_1 + m_2}\mathbf{r}, \quad \mathbf{r}_2 = \frac{m_1}{m_1 + m_2}\mathbf{r}. \qquad (3.133)$$

Подобно (3.41), можно написать, что

$$\mathbf{F}_{12} = -\mathbf{F}_{21} = f(r)\,\mathbf{e}_r,$$

где $f(r)$ — функция расстояния между частицами, положительная для сил притяжения (рис. 3.30 *в*) и отрицатель-

Рис. 3.30

ная для сил отталкивания. Напишем уравнения движения частиц:

$$m_1\ddot{\mathbf{r}}_1 = f(r)\,\mathbf{e}_r, \quad m_2\dot{\mathbf{r}}_2 = -f(r)\,\mathbf{e}_r.$$

Разделим первое уравнение на m_1, а второе — на m_2 и вычтем затем из второго уравнения первое. В результате получим

$$\ddot{\mathbf{r}}_2 - \ddot{\mathbf{r}}_1 = -\left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}\right) f(r)\,\mathbf{e}_r.$$

Согласно (3.132) левая часть есть $\mathbf{r}$. Таким образом,

$$\mathbf{r} = -\left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}\right) f(r)\, \mathbf{e}_r. \tag{3.134}$$

Уравнение (3 134) можно формально рассматривать как уравнение движения воображаемой частицы в центральном поле сил Положение частицы относительно центра сил определяется радиусом-вектором $\mathbf{r}$. Согласно (3.134) воображаемой частице нужно приписать массу μ, определяемую условием

$$\frac{1}{\mu} = \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}. \tag{3.135}$$

Отсюда

$$\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}. \tag{3.136}$$

Величина (3.136) называется **приведенной массой** частиц.

Таким образом, задача двух тел сводится к задаче о движении одной частицы в центральном поле сил. Найдя из (3 134) $\mathbf{r}$ как функцию t, можно определить по формулам (3 133) $\mathbf{r}_1(t)$ и $\mathbf{r}_2(t)$ Векторы $\mathbf{r}_1$ и $\mathbf{r}_2$ откладываются из центра масс системы C. Поэтому, чтобы можно было воспользоваться формулами (3 133), радиус-вектор $\mathbf{r}$ воображаемой частицы нужно откладывать также из точки C (для реальных частиц вектор (3.132) проводится от первой частицы ко второй).

Из формул (3.133) и рис 3 30 видно, что обе частицы движутся относительно центра масс по геометрически подобным траекториям[10]), причем прямая, соединяющая частицы, все время проходит через центр масс.

[10]) В случае, когда сила взаимодействия обратно пропорциональна квадрату расстояния между частицами, эти траектории представляют собой эллипсы, или параболы, или гиперболы (см. § 3.13).

Глава 4

Неинерциальные системы отсчета

4.1. Силы инерции

Законы Ньютона выполняются только в инерциальных системах отсчета. Относительно всех инерциальных систем данное тело движется с одинаковым ускорением $\mathbf{w}$. Любая неинерциальная система отсчета движется относительно инерциальных систем с некоторым ускорением, поэтому ускорение тела в неинерциальной системе отсчета $\mathbf{w}'$ будет отлично от $\mathbf{w}$. Обозначим разность ускорений тела в инерциальной и неинерциальной системах символом $\mathbf{a}$:

$$\mathbf{w} - \mathbf{w}' = \mathbf{a}. \tag{4.1}$$

Для поступательно движущейся неинерциальной системы $\mathbf{a}$ одинаково для всех точек пространства ($\mathbf{a} = \text{const}$) и представляет собой ускорение неинерциальной системы отсчета. Для вращающейся неинерциальной системы $\mathbf{a}$ в разных точках пространства будет различным ($\mathbf{a} = \mathbf{a}(\mathbf{r}')$, где $\mathbf{r}'$ — радиус-вектор, определяющий положение точки относительно неинерциальной системы отсчета).

Пусть результирующая всех сил, обусловленных действием на данное тело со стороны других тел, равна $\mathbf{F}$ Тогда согласно второму закону Ньютона ускорение тела относительно любой инерциальной системы отсчета равно

$$\mathbf{w} = \frac{1}{m}\mathbf{F}.$$

Ускорение же тела относительно некоторой неинерциальной системы можно в соответствии с (4.1) представить в виде

$$\mathbf{w}' = \mathbf{w} - \mathbf{a} = \frac{1}{m}\mathbf{F} - \mathbf{a}.$$

Отсюда следует, что даже при $\mathbf{F} = 0$ тело будет двигаться по отношению к неинерциальной системе отсчета с ускорением $-\mathbf{a}$, т. е так, как если бы на него действовала сила, равная $-m\mathbf{a}$.

Сказанное означает, что при описании движения в неинерциальных системах отсчета можно пользоваться уравнениями Ньютона, если наряду с силами, обусловленными воздействием тел друг на друга, учитывать так называемые **силы инерции** $\mathbf{F}_{in}$, которые следует полагать равными произведению массы тела на взятую с обратным знаком разность его ускорений по отношению к инерциальной и неинерциальной системам отсчета:

$$\mathbf{F}_{in} = -m(\mathbf{w} - \mathbf{w}') = -m\mathbf{a}. \qquad (4.2)$$

Соответственно уравнение второго закона Ньютона в неинерциальной системе отсчета будет иметь вид

$$m\mathbf{w}' = \mathbf{F} + \mathbf{F}_{in}. \qquad (4.3)$$

Поясним наше утверждение следующим примером. Рассмотрим тележку с укрепленным на ней кронштейном, к которому подвешен на нити шарик (рис. 4.1). Пока тележка покоится или движется без ускорения, нить расположена вертикально и сила тяжести $\mathbf{P}$ уравновешивается реакцией нити $\mathbf{F}_r$. Теперь приведем тележку в поступательное движение с ускорением $\mathbf{a}$. Нить отклонится от вертикали на такой угол, чтобы результирующая сил $\mathbf{P}$ и $\mathbf{F}_r$ сообщала шарику ускорение, равное $\mathbf{a}$. Относительно системы отсчета, связанной с тележкой, шарик покоится, несмотря на то что результирующая сил $\mathbf{P}$ и $\mathbf{F}_r$ отлична от нуля. Отсутствие ускорения шарика по отношению к этой системе отсчета можно формально объяснить тем, что, кроме сил $\mathbf{P}$ и $\mathbf{F}_r$, равных в сумме $m\mathbf{a}$, на шарик действует еще и сила инерции $\mathbf{F}_{in} = -m\mathbf{a}$.

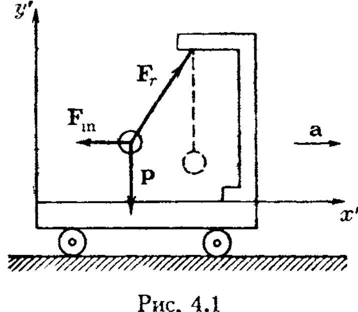


Рис. 4.1

Введение сил инерции дает возможность описывать движение тел в любых (как инерциальных, так и неинерциальных) системах отсчета с помощью одних и тех же уравнений движения.

Следует отчетливо понимать, что силы инерции нельзя ставить в один ряд с такими силами, как упругие, гравитационные силы и силы трения, т. е. силами, обусловленными воздействием на тело со стороны других тел. Силы

инерции обусловлены свойствами той системы отсчета, в которой рассматриваются механические явления. В этом смысле их можно назвать фиктивными силами.

Введение в рассмотрение сил инерции не является принципиально необходимым. В принципе любое движение можно всегда рассмотреть по отношению к инерциальной системе отсчета. Однако практически часто представляет интерес как раз движение тел по отношению к неинерциальным системам отсчета, например по отношению к земной поверхности. Использование сил инерции дает возможность решить соответствующую задачу непосредственно по отношению к такой системе отсчета, что часто оказывается значительно проще, чем рассмотрение движения в инерциальной системе.

Характерным свойством сил инерции является их пропорциональность массе тела. Благодаря этому свойству силы инерции оказываются аналогичными силам тяготения. Представим себе, что мы находимся в удаленной от всех внешних тел закрытой кабине, которая движется с ускорением $\mathbf{g}$ в указанном на рис. 4.2 направлении. Тогда все тела, находящиеся внутри кабины, будут вести себя так, как если бы на них действовала сила инерции $-m\mathbf{g}$. В частности, пружина, к концу которой подвешено тело массы m, растянется так, чтобы упругая сила уравновесила силу инерции $-m\mathbf{g}$. Однако такие же явления наблюдались бы и в том случае, если бы кабина была неподвижной и находилась вблизи поверхности Земли. Не имея возможности «выглянуть» за пределы кабины, никакими опытами, проводимыми внутри кабины, мы не смогли бы установить, чем обусловлена сила $-m\mathbf{g}$ — ускоренным движением кабины или действием гравитационного поля Земли. На этом основании говорят об **эквивалентности** сил инерции и тяготения (в однородном гравитационном поле). Эта эквивалентность лежит в основе **общей теории относительности** Эйнштейна.

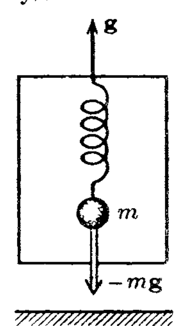


Рис. 4.2

4.2. Центробежная сила инерции

Рассмотрим диск, вращающийся вокруг перпендикулярной к нему вертикальной оси z' с угловой скоростью ω (рис. 4.3). Вместе с диском вращается надетый на спицу

шарик, соединенный с центром диска пружиной. Шарик занимает на спице такое положение, при котором сила натяжения пружины $\mathbf{F}_{\text{пр}}$ оказывается равной произведе-

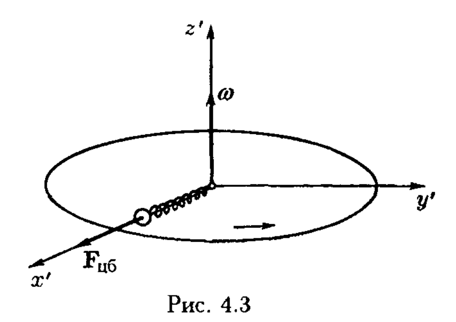


Рис. 4.3

нию массы шарика m на его ускорение $\mathbf{w}_n = -\omega^2\mathbf{R}$ (см. (1.102)); $\mathbf{R}$ — радиус-вектор, проведенный к шарику из центра диска (R — расстояние шарика от центра диска):

$$\mathbf{F}_{\text{пр}} = -m\omega^2\mathbf{R}. \tag{4.4}$$

Относительно системы отсчета, связанной с диском, шарик покоится. Это можно формально объяснить тем, что, кроме силы (4.4), на шарик действует сила инерции

$$\mathbf{F}_{\text{цб}} = m\omega^2\mathbf{R}, \tag{4.5}$$

направленная вдоль радиуса от центра диска.

Силу инерции (4.5), возникающую во вращающейся (по отношению к инерциальным системам) системе отсчета, называют *центробежной силой инерции*. Эта сила действует на тело во вращающейся системе отсчета, независимо от того, покоится тело в этой системе (как мы предполагали до сих пор) или движется относительно нее со скоростью $\mathbf{v}'$.

Если положение тела во вращающейся системе отсчета характеризовать радиусом-вектором $\mathbf{r}'$, то центробежную силу инерции можно представить в виде двойного векторного произведения:

$$\mathbf{F}_{\text{цб}} = m[\boldsymbol{\omega}\,[\mathbf{r}'\,\boldsymbol{\omega}]]. \tag{4.6}$$

Действительно, вектор $\mathbf{b} = [\mathbf{r}', \boldsymbol{\omega}]$ направлен «на нас» перпендикулярно к векторам $\boldsymbol{\omega}$ и $\mathbf{F}_{\text{цб}}$ (рис. 4.4) и равен по

модулю $\omega r' \sin\alpha = \omega R$. Векторное произведение взаимно перпендикулярных векторов $m\boldsymbol{\omega}$ и $\mathbf{b}$ совпадает по направлению с $\mathbf{F}_{\text{цб}}$ и имеет модуль, равный $m\omega b = m\omega^2 R = F_{\text{цб}}$.

При точном решении задач о движении тел относительно земной поверхности нужно учитывать центробежную силу инерции, равную $m\omega^2 R$, где m — масса тела, ω — угловая скорость вращения Земли вокруг ее оси, R — расстояние тела от земной оси (рис. 4.5). В случаях, когда высота тела над поверхностью Земли невелика, можно положить R равным $R_З \cos\varphi$ ($R_З$ — радиус Земли, φ — широта местности). Тогда выражение для центробежной силы инерции примет вид

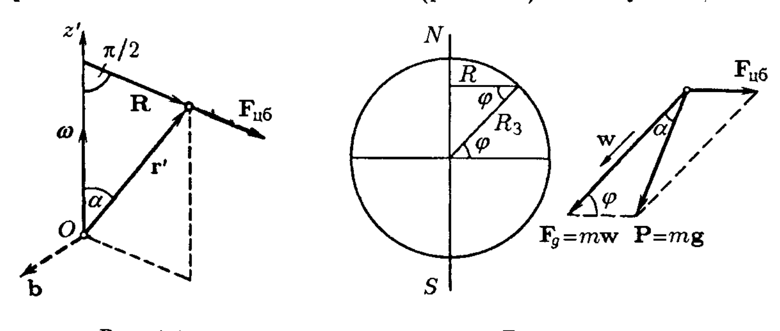


Рис. 4.4

Рис. 4.5

$$F_{\text{цб}} = m\omega^2 R_З \cos\varphi. \tag{4.7}$$

Наблюдаемое относительно Земли **ускорение свободного падения** тела $\mathbf{g}$ обусловлено действием силы $\mathbf{F}_g$, с которой тело притягивается Землей, и силы $\mathbf{F}_{\text{цб}}$. Результирующая этих сил

$$\mathbf{P} = \mathbf{F}_g + \mathbf{F}_{\text{цб}} \tag{4.8}$$

есть сила тяжести, равная $m\mathbf{g}$ (см. (2.34)).

Отличие силы тяжести $\mathbf{P}$ от силы притяжения к Земле $\mathbf{F}_g$ невелико, так как центробежная сила инерции значительно меньше $\mathbf{F}_g$. Так, для массы 1 кг наибольшее значение $\mathbf{F}_{\text{цб}}$, наблюдаемое на экваторе, равно

$$m\omega^2 R_З = 1 \cdot (2\pi/86\,400)^2 \cdot 6,4 \cdot 10^6 = 0,035\,\text{Н},$$

в то время как $\mathbf{F}_g$ равна приблизительно 9,8 Н, т. е. почти в 300 раз больше.

Угол α между направлениями $\mathbf{F}_g$ и $\mathbf{P}$ (см. рис. 4.5) можно определить, воспользовавшись теоремой синусов:

$$\frac{\sin\alpha}{\sin\varphi}=\frac{F_{\text{цб}}}{P}=\frac{m\omega^2 R_З\cos\varphi}{mg}\approx\frac{0,035}{9,8}\cos\varphi\approx 0,0035\cos\varphi,$$

откуда

$$\sin\alpha\approx 0,0035\sin\varphi\cos\varphi\approx 0,0018\sin 2\varphi.$$

Синус малого угла можно приближенно заменить значением самого угла. В результате получим, что

$$\alpha\approx 0,0018\sin 2\varphi. \tag{4.9}$$

Таким образом, угол α изменяется в пределах от нуля (на экваторе, где $\varphi = 0$, и на полюсах, где $\varphi = 90°$) до 0,0018 рад или $6'$ (на широте 45°).

Направление силы $\mathbf{P}$ совпадает с направлением нити, натянутой грузом, которое называется направлением отвеса или вертикальным направлением. Сила $\mathbf{F}_g$ направлена к центру Земли. Следовательно, вертикаль направлена к центру Земли только на полюсах и на экваторе, отклоняясь на промежуточных широтах на угол α, определяемый выражением (4.9).

Разность $F_g - P$ равна нулю на полюсах и достигает максимума, равного 0,3 % силы F_g, на экваторе. Из-за сплюснутости Земли у полюсов сила F_g сама по себе несколько варьирует с широтой, будучи на экваторе примерно на 0,2 % меньше, чем у полюсов. В итоге ускорение свободного падения изменяется с широтой в пределах от 9,780 на экваторе до 9,832 м/с^2 на полюсах. Значение $g = 9,80665$ м/с^2 принято в качестве нормального (стандартного) значения.

Заметим, что относительно инерциальной, например гелиоцентрической, системы отсчета свободно падающее тело движется с ускорением $\mathbf{w} = \mathbf{F}_g/m$ (а не $\mathbf{g}$). Из рис. 4.5 видно, что из равенства для разных тел ускорения g вытекает и равенство ускорений w. Действительно, треугольники, построенные на векторах $\mathbf{F}_g$ и $\mathbf{P}$ для разных тел, подобны (углы α и φ для всех тел в данной точке зем-

ной поверхности одинаковы). Следовательно, отношение F_g/P, которое совпадает с отношением w/g, для всех тел одно и то же, откуда вытекает, что при одинаковых g получаются одинаковыми и w.

4.3. Сила Кориолиса

При движении тела относительно вращающейся системы отсчета, кроме центробежной силы инерции, появляется еще одна сила, называемая силой Кориолиса[1]) или кориолисовой силой инерции.

Появление кориолисовой силы можно обнаружить на следующем примере. Возьмем горизонтально расположенный диск, который может вращаться вокруг вертикальной оси. Прочертим на диске радиальную прямую OA (рис. 4.6 *а*). Запустим в направлении от O к A шарик со скоростью $\mathbf{v}'$. Если диск не вращается, шарик будет катиться вдоль прочерченной нами прямой. Если же диск

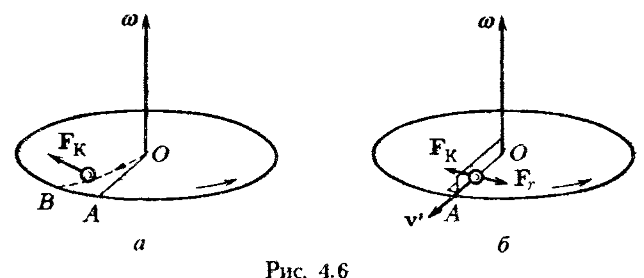


Рис. 4.6

привести во вращение в направлении, указанном стрелкой, то шарик будет катиться по штриховой кривой OB, причем его скорость относительно диска $\mathbf{v}'$ будет изменять свое направление. Следовательно, по отношению к вращающейся системе отсчета шарик ведет себя так, как если бы на него действовала сила $\mathbf{F}_К$, перпендикулярная к скорости $\mathbf{v}'$.

Чтобы заставить шарик катиться по вращающемуся диску вдоль радиальной прямой, нужно сделать направляющую, например, в виде ребра OA (рис. 4.6 *б*). При качении шарика направляющее ребро действует на него с некоторой силой $\mathbf{F}_r$. Относительно вращающейся си-

[1]) Гюстав Гаспар Кориолис (1792–1843) — французский ученый в области механики.

стемы (диска) шарик движется с постоянной по направлению скоростью. Это можно формально объяснить тем, что сила $\mathbf{F}_r$ уравновешивается приложенной к шарику силой инерции $\mathbf{F}_К$, перпендикулярной к скорости $\mathbf{v}'$. Сила $\mathbf{F}_K$ и есть кориолисова сила инерции.

Найдем сначала выражение силы Кориолиса для частного случая, когда частица m движется относительно вращающейся системы отсчета равномерно по окружности, лежащей в плоскости, перпендикулярной к оси вращения, с центром, находящимся на этой оси (рис. 4.7). Скорость

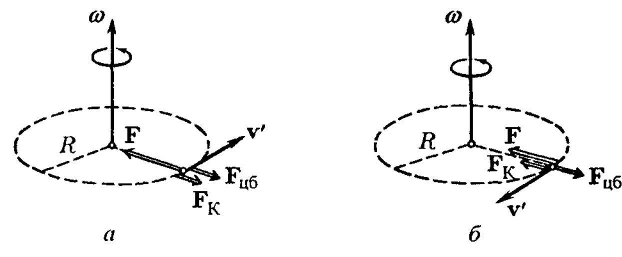


Рис. 4.7

частицы относительно вращающейся системы обозначим $\mathbf{v}'$. Скорость частицы относительно неподвижной (инерциальной) системы отсчета $\mathbf{v}$ равна по модулю $v' + \omega R$ в случае (a) и $|v' - \omega R|$ в случае ($б$), где ω — угловая скорость вращающейся системы, R — радиус окружности (см. (1.99)).

Для того чтобы частица двигалась относительно неподвижной системы по окружности со скоростью $v = v' + \omega R$, на нее должна действовать направленная к центру окружности сила $\mathbf{F}$, например сила натяжения нити, которой частица привязана к центру окружности (см. рис. 4.7a). Модуль этой силы равен

$$F = m\boldsymbol{w}_n = \frac{mv^2}{R} = \frac{m(v' + \omega R)^2}{R} = \frac{mv'^2}{R} + 2mv'\omega + m\omega^2 R. \tag{4.10}$$

Относительно вращающейся системы частица в этом случае движется с ускорением $w'_n = v'^2/R$, т. е. так, как если бы на нее действовала сила

$$mw'_n = \frac{mv'^2}{R} = F - 2mv'\omega - m\omega^2 R \tag{4.11}$$

(см. (4.10)). Таким образом, во вращающейся системе частица ведет себя так, как если бы на нее, кроме направленной к центру окружности силы **F**, действовали еще две направленные от центра силы: $\mathbf{F}_{\text{цб}} = m\omega^2\mathbf{R}$ и сила $\mathbf{F}_{\text{К}}$, модуль которой равен $2mv'\omega$ (рис. 4.11 *а*). Легко сообразить, что силу $\mathbf{F}_{\text{К}}$ можно представить в виде

$$\mathbf{F}_{\text{К}} = 2m[\mathbf{v}'\boldsymbol{\omega}]. \qquad (4.12)$$

Сила (4.12) и есть кориолисова сила инерции. При $\mathbf{v}' = 0$ эта сила отсутствует. Сила $\mathbf{F}_{\text{цб}}$ не зависит от $\mathbf{v}'$ — она, как мы уже отмечали, действует как на покоящиеся, так и на движущиеся тела.

В случае, изображенном на рис. 4.7 *б*,

$$F = \frac{mv^2}{R} = \frac{m(v' - \omega R)^2}{R} = \frac{mv'^2}{R} - 2mv'\omega + m\omega^2 R.$$

Соответственно

$$\frac{mv'^2}{R} = F + 2mv'\omega - m\omega^2 R.$$

Следовательно, во вращающейся системе частица ведет себя так, как если бы на нее действовали две направленные к центру окружности силы: **F** и $\mathbf{F}_{\text{К}}$, а также направленная от центра сила $\mathbf{F}_{\text{цб}} = m\omega^2\mathbf{R}$ (см. рис. 4.7 *б*). Сила $\mathbf{F}_{\text{К}}$ и в этом случае может быть представлена в виде (4.12).

Запоминанию формулы (4.12) могут способствовать следующие соображения. Сила Кориолиса возникает при движении частицы относительно вращающейся системы отсчета, т. е. при условии, что «имеются в наличии» масса частицы m, скорость частицы $\mathbf{v}'$ и угловая скорость системы $\boldsymbol{\omega}$. Очевидно, что сила Кориолиса определяется именно этими тремя величинами и никакими иными. Простейший способ получить из скаляра m и двух векторов $\mathbf{v}'$ и $\boldsymbol{\omega}$ новый вектор **F** состоит в том, чтобы перемножить $\mathbf{v}'$ и $\boldsymbol{\omega}$ векторно, а затем умножить результат на m. В итоге получится выражение $m[\mathbf{v}'\boldsymbol{\omega}]$, которое с точностью до двойки совпадает с (4.12). Запомнить последовательность сомножителей в произведении $[\mathbf{v}'\boldsymbol{\omega}]$ может помочь то обстоятельство, что величины m и $\mathbf{v}'$, характеризующие частицу, стоят рядом в начале формулы, в то время

как величина, характеризующая систему отсчета (т. е. ω), стоит особняком в конце формулы.

Теперь перейдем к нахождению выражения силы Кориолиса для случая, когда частица движется относительно вращающейся системы отсчета произвольным образом. Свяжем с вращающейся системой координатные оси x', y', z', причем ось z' совместим с осью вращения (рис. 4.8). Тогда радиус-вектор частицы можно представить в виде

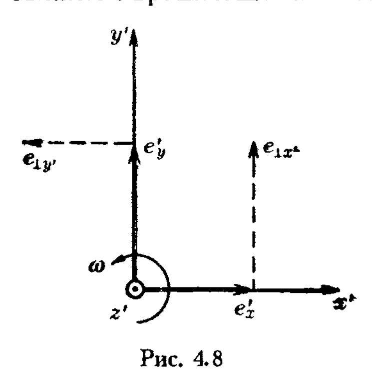


Рис. 4.8

$$\mathbf{r}' = x'\mathbf{e}'_x + y'\mathbf{e}'_y + z'\mathbf{e}'_z, \quad (4.13)$$

где $\mathbf{e}'_x$, $\mathbf{e}'_y$ и $\mathbf{e}'_z$ — орты координатных осей. Орты $\mathbf{e}'_x$ и $\mathbf{e}'_y$ вращаются вместе с системой отсчета с угловой скоростью ω, орт $\mathbf{e}'_z$ остается неподвижным.

Положение частицы относительно неподвижной системы следует определять с помощью радиуса-вектора $\mathbf{r}$. Однако символы $\mathbf{r}'$ и $\mathbf{r}$ обозначают один и тот же вектор, проведенный из начала координат к частице. Символом $\mathbf{r}'$ обозначил этот вектор наблюдатель, «находящийся» во вращающейся системе отсчета; по его наблюдениям орты $\mathbf{e}'_x$, $\mathbf{e}'_y$, $\mathbf{e}'_z$ неподвижны, поэтому при дифференцировании выражения (4.13) он обращается с этими ортами как с константами. Символом $\mathbf{r}$ пользуется неподвижный наблюдатель; для него орты $\mathbf{e}'_x$ и $\mathbf{e}'_y$ вращаются со скоростью ω (орт $\mathbf{e}'_z$ неподвижен). Поэтому при дифференцировании равного $\mathbf{r}$ выражения (4.13) неподвижный наблюдатель должен обращаться с $\mathbf{e}'_x$ и $\mathbf{e}'_y$ как с функциями t, производные которых равны

$$\dot{\mathbf{e}}'_x = \omega\mathbf{e}'_y, \quad \dot{\mathbf{e}}'_y = -\omega\mathbf{e}'_x \quad (4.14)$$

(см. рис. 4.8 и формулу (1.56); орт $\mathbf{e}_{\perp x}$, перпендикулярный к $\mathbf{e}'_x$, равен $\mathbf{e}'_y$, орт $\mathbf{e}_{\perp y}$, перпендикулярный к $\mathbf{e}'_y$, равен $-\mathbf{e}'_x$). Для вторых производных ортов по времени получаются выражения

$$\ddot{\mathbf{e}}_x = \omega\dot{\mathbf{e}}'_y = \omega^2\mathbf{e}'_x, \quad \ddot{\mathbf{e}}'_y = -\omega\dot{\mathbf{e}}'_x = -\omega^2\mathbf{e}'_y. \quad (4.15)$$

Найдем скорость частицы относительно вращающейся системы отсчета. Для этого продифференцируем радиус-вектор (4.13) по времени, считая орты константами:

$$\mathbf{v}' = \dot{\mathbf{r}}' = \dot{x}'\mathbf{e}'_x + \dot{y}'\mathbf{e}'_y + \dot{z}'\mathbf{e}'_z. \quad (4.16)$$

Повторное дифференцирование этого выражения даст ускорение частицы относительно вращающейся системы отсчета:

$$\mathbf{w}' = \dot{\mathbf{v}}' = \ddot{x}'\mathbf{e}'_x + \ddot{y}'\mathbf{e}'_y + \ddot{z}'\mathbf{e}'_z. \quad (4.17)$$

Теперь найдем скорость частицы относительно неподвижной системы отсчета. Для этого продифференцируем радиус-вектор (4.13) «с позиций» неподвижного наблюдателя. Воспользовавшись обозначением $\mathbf{r}$ вместо $\mathbf{r}'$ (напомним, что $\mathbf{r} \equiv \mathbf{r}'$), получим

$$\mathbf{v} = \dot{\mathbf{r}} = \dot{x}'\mathbf{e}'_x + x'\dot{\mathbf{e}}'_x + \dot{y}'\mathbf{e}'_y + y'\dot{\mathbf{e}}'_y + \dot{z}'\mathbf{e}'_z. \quad (4.18)$$

Продифференцировав это выражение еще раз по t, найдем ускорение частицы относительно неподвижной системы:

$$\mathbf{w} = \dot{\mathbf{v}} = \ddot{x}'\mathbf{e}'_x + 2\dot{x}'\dot{\mathbf{e}}'_x + x'\ddot{\mathbf{e}}'_x + \ddot{y}'\mathbf{e}'_y + 2\dot{y}'\dot{\mathbf{e}}'_y + y'\ddot{\mathbf{e}}'_y + \ddot{z}'\mathbf{e}'_z.$$

Приняв во внимание формулы (4.14), (4.15) и (4.17), полученное соотношение можно преобразовать к виду

$$\mathbf{w} = \mathbf{w}' + 2\omega(\dot{x}'\mathbf{e}'_y - \dot{y}'\mathbf{e}'_x) - \omega^2(x'\mathbf{e}'_x + y'\mathbf{e}'_y). \quad (4.19)$$

Рассмотрим векторное произведение $[\boldsymbol{\omega}\,\mathbf{v}']$. Представим его в виде определителя (см. (1.33)):

$$[\boldsymbol{\omega}\,\mathbf{v}'] = \begin{vmatrix} \mathbf{e}'_x & \mathbf{e}'_y & \mathbf{e}'_z \\ \omega_x & \omega_y & \omega_z \\ v'_x & v'_y & v'_z \end{vmatrix}. \quad (4.20)$$

Согласно (4.16) $v'_x = \dot{x}'$, $v'_y = \dot{y}'$, $v'_z = \dot{z}'$, кроме того, при выбранном нами направлении координатных осей $\omega_x = 0$, $\omega_y = 0$, $\omega_z = \omega$. Подстановка этих значений в (4.20) дает

$$[\boldsymbol{\omega}\,\mathbf{v}'] = \begin{vmatrix} \mathbf{e}'_x & \mathbf{e}'_y & \mathbf{e}'_z \\ 0 & 0 & \omega \\ \dot{x}' & \dot{y}' & \dot{z}' \end{vmatrix} = -\mathbf{e}'_x\omega\dot{y}' + \mathbf{e}'_y\omega\dot{x}'. \quad (4.21)$$

Полученный результат показывает, что второй член формулы (4.19) можно записать в виде $2[\boldsymbol{\omega}\,\mathbf{v}']$. Выражение, стоящее в скобках в последнем члене формулы (4.19), равно перпендикулярной к оси вращения (к оси z') составляющей радиуса-вектора $\mathbf{r}'$ (см. (4.13)). Обозначим эту составляющую символом $\mathbf{R}$ (ср. с рис. 1.33). С учетом всего сказанного соотношение (4.19) можно записать следующим образом:

$$\mathbf{w} = \mathbf{w}' + 2[\boldsymbol{\omega}\,\mathbf{v}'] - \omega^2\mathbf{R}. \tag{4.22}$$

Из (4.22) вытекает, что ускорение частицы относительно неподвижной системы отсчета можно представить в виде суммы трех ускорений: ускорения относительно вращающейся системы $\mathbf{w}'$, ускорения, равного[2] $-\omega^2\mathbf{R}$, и ускорения

$$\mathbf{w}_{\text{K}} = 2[\boldsymbol{\omega}\,\mathbf{v}'], \tag{4.23}$$

которое называется *кориолисовым ускорением*.

Для того чтобы частица двигалась с ускорением (4.22), на нее должны действовать какие-то тела с результирующей силой $\mathbf{F} = m\mathbf{w}$. Согласно (4.22)

$$m\mathbf{w}' = m\mathbf{w} - 2m[\boldsymbol{\omega}\,\mathbf{v}'] + m\omega^2\mathbf{R} = \mathbf{F} + 2m[\mathbf{v}'\,\boldsymbol{\omega}] + m\omega^2\mathbf{R} \tag{4.24}$$

(перестановка сомножителей изменяет знак векторного произведения). Полученный результат означает, что при составлении уравнения второго закона Ньютона во вращающейся системе отсчета, кроме сил взаимодействия, нужно учитывать центробежную силу инерции, определяемую формулой (4.5), а также кориолисову силу, которая и в самом общем случае определяется формулой (4.12). Отметим, что сила Кориолиса всегда лежит в плоскости, перпендикулярной к оси вращения.

Из сопоставления формул (4.18), (4.16) и (4.14) вытекает, что

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}' + x'\dot{\mathbf{e}}'_x + y'\dot{\mathbf{e}}'_y = \mathbf{v}' + \omega(x'\mathbf{e}'_y - y'\mathbf{e}'_x).$$

---

[2]) Ускорение $\mathbf{w}_{\text{п}} = -\omega^2\mathbf{R}$ называется *переносным*. Оно представляет собой то ускорение, которым обладала бы частица, покоящаяся в движущейся (в нашем случае во вращающейся) системе отсчета.

С помощью выкладок, аналогичных тем, которые привели нас к соотношению (4.22), можно убедиться в том, что последний член полученного выражения равен $[\boldsymbol{\omega}\mathbf{r}']$. Следовательно,

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}' + [\boldsymbol{\omega}\mathbf{r}']. \tag{4.25}$$

При $\mathbf{v}' = 0$ эта формула переходит в (1.100).

Примеры движений, в которых проявляется кориолисова сила инерции. При истолковании явлений, связанных с движением тел относительно земной поверхности, в ряде случаев необходимо учитывать влияние кориолисовых сил. Например, при свободном падении тел на них действует кориолисова сила, обусловливающая отклонение к востоку от линии отвеса (рис. 4.9). Эта сила максимальна на экваторе и обращается в нуль на полюсах.

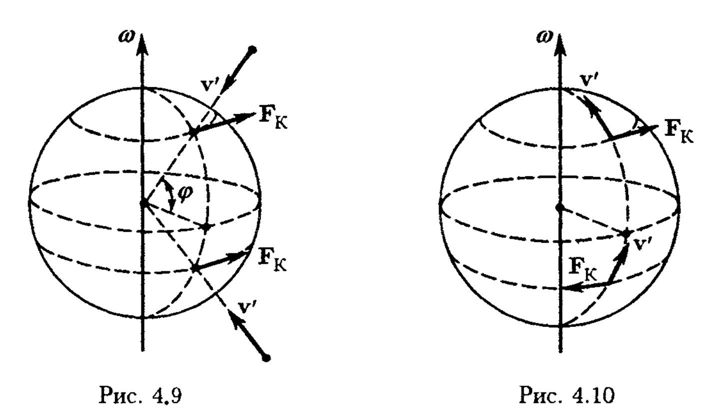


Рис. 4.9 Рис. 4.10

Летящий снаряд также испытывает отклонения, обусловленные кориолисовыми силами инерции (рис. 4.10). При выстреле из орудия, направленного на север, снаряд будет отклоняться к востоку в северном полушарии и к западу — в южном. При стрельбе вдоль меридиана на юг направления отклонения будут противоположными. При стрельбе вдоль экватора силы Кориолиса будут прижимать снаряд к Земле, если выстрел произведен в направлении на запад, и поднимать его кверху, если выстрел произведен в восточном направлении. Предоставляем читателю самому убедиться в том, что сила Кориолиса, действующая на тело, движущееся вдоль меридиана в любом

направлении (на север или на юг), направлена по отношению к направлению движения вправо в северном полушарии и влево в южном полушарии. Это приводит к тому, что у рек подмывается всегда правый берег в северном полушарии и левый берег в южном полушарии. Эти же причины объясняют неодинаковый износ рельсов при двухколейном движении.

Силы Кориолиса проявляются и при качаниях маятника. На рис. 4.11 показана траектория груза маятника (для простоты предположено, что маятник находится на полюсе). На северном полюсе сила Кориолиса будет все время направлена вправо по ходу маятника, на южном полюсе — влево. В итоге траектория имеет вид розетки.

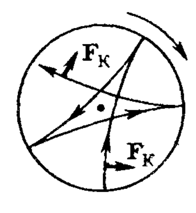


Рис 4 11

Как следует из рисунка, плоскость качаний маятника поворачивается относительно Земли в направлении часовой стрелки, причем за сутки она совершает один оборот. Относительно гелиоцентрической системы отсчета дело обстоит так, что плоскость качаний остается неизменной, а Земля поворачивается относительно нее, делая за сутки один оборот. Можно показать, что на широте φ плоскость качаний маятника поворачивается за сутки на угол $2\pi \sin\varphi$.

Таким образом, наблюдения за вращением плоскости качаний маятника (маятники, предназначенные для этой цели, называются маятниками Фуко[3]) дают непосредственное доказательство вращения Земли вокруг своей оси.

4.4. Законы сохранения в неинерциальных системах отсчета

С учетом сил инерции уравнения движения в неинерциальной системе ничем не отличаются от уравнений движения в инерциальной системе отсчета. Поэтому все следствия, вытекающие из уравнений движения, в частности соотношения (3.77), (3.88) и (3.118), остаются справедливыми и в неинерциальных системах отсчета.

---

[3]) Жан Бернар Леон Фуко (1819–1868) — французский физик.

В неинерциальной системе формула (3.77) имеет вид

$$E_2 - E_1 = A_{12\,\text{неконсерв}} + A_{12\,\text{инерц}}, \qquad (4.26)$$

где $A_{12\,\text{инерц}}$ — работа сил инерции.

Формулы (3.88) и (3.118) выглядят в неинерциальной системе следующим образом:

$$\frac{d}{dt}\mathbf{p} = \sum \mathbf{F}_{\text{внешн}} + \sum \mathbf{F}_{\text{инерц}}, \qquad (4.27)$$

$$\frac{d}{dt}\mathbf{M} = \sum \mathbf{N}_{\text{внешн}} + \sum \mathbf{N}_{\text{инерц}}. \qquad (4.28)$$

Рис. 4.12

Здесь $\mathbf{F}_{\text{внешн}}$ — сила, обусловленная взаимодействием, $\mathbf{F}_{\text{инерц}}$ — сила инерции; $\mathbf{N}_{\text{внешн}}$ и $\mathbf{N}_{\text{инерц}}$ — моменты указанных сил.

Центробежная сила инерции $\mathbf{F}_{\text{цб}} = m\omega^2\mathbf{R}$ является консервативной. Действительно, работа этой силы равна

$$A_{12\,\text{цб}} = \int_1^2 \mathbf{F}_{\text{цб}}\, d\mathbf{r} = m\omega^2 \int_1^2 \mathbf{R}\, d\mathbf{r}.$$

Из рис. 4.12 видно, что проекция вектора $d\mathbf{r}$ на направление вектора $\mathbf{R}$ равна dR — приращению модуля $\mathbf{R}$. Следовательно, $\mathbf{R}\,d\mathbf{r} = R\,dR = d(R^2/2)$. Таким образом,

$$A_{12\,\text{цб}} = m\omega^2 \int_1^2 d\left(\frac{R^2}{2}\right) = m\omega^2\frac{R_2^2}{2} - m\omega^2\frac{R_1^2}{2}. \qquad (4.29)$$

Полученное выражение, очевидно, не зависит от пути, по которому происходит перемещение из точки *1* в точку *2*.

Консервативность силы $\mathbf{F}_{\text{цб}}$ позволяет ввести потенциальную энергию частицы $U_{\text{цб}}$ (центробежную энергию), убыль которой определеляет работу центробежной силы инерции:

$$A_{12\,\text{цб}} = U_{\text{цб}\,1} - U_{\text{цб}\,2} \qquad (4.30)$$

(см. формулу (3.26)). Из сопоставления формул (4.29) и (4.30) заключаем, что

$$U_{\text{цб}} = -\frac{1}{2}m\omega^2 R^2 + \text{const}.$$

Константу можно положить равной нулю. Тогда для центробежной энергии получится следующее выражение:

$$U_{\text{цб}} = -\frac{1}{2}m\omega^2 R^2. \qquad (4.31)$$

Если выражение (4.31) добавить к потенциальной энергии частицы, то в величину $A_{12\,\text{инерц}}$ в формуле (4.26) не следует включать работу центробежной силы инерции.

Глава 5

Механика твердого тела

5.1. Движение твердого тела

В § 1.1 мы познакомились с двумя основными видами движения твердого тела — поступательным и вращательным.

При поступательном движении все точки тела получают за один и тот же промежуток времени равные по модулю и направлению перемещения, вследствие чего скорости и ускорения всех точек в каждый момент времени оказываются одинаковыми. Поэтому достаточно определить движение одной из точек тела (например, его центра масс) для того, чтобы охарактеризовать полностью движение всего тела.

При вращательном движении все точки твердого тела движутся по окружностям, центры которых лежат на одной и той же прямой, называемой осью вращения. Для описания вращательного движения нужно задать положение в пространстве оси вращения и угловую скорость тела в каждый момент времени.

Оказывается, что любое движение твердого тела может быть представлено как наложение двух указанных выше основных видов движения. Покажем это для случая плоского движения, т. е. такого, при котором все точки тела перемещаются в параллельных плоскостях. Примером плоского движения может служить качение цилиндра по плоскости (рис. 5.1).

Произвольное перемещение твердого тела из положения *1* в положение *2* (рис. 5.2) можно представить как сумму двух перемещений — поступательного перемещения из положения *1* в положение *1'* или *1''* и поворота вокруг оси O' или оси O''. Очевидно, что такое разбиение перемещения на поступательное и вращательное может быть осуществлено бесчисленным множеством способов, однако в любом случае производится поворот на один и тот же угол φ.

В соответствии со сказанным выше элементарное перемещение какой-либо точки тела $d\mathbf{s}$ можно разложить на два перемещения — «поступательное» $d\mathbf{s}_п$ и «вращательное» $d\mathbf{s}_в$:

$$d\mathbf{s} = d\mathbf{s}_п + d\mathbf{s}_в,$$

причем перемещение $d\mathbf{s}_п$ для всех точек тела одно и то же. Такое разложение перемещения $d\mathbf{s}$ можно, как мы видели, осуществить различными способами, причем в каждом случае вращательное перемещение $d\mathbf{s}_в$ осуществляется поворотом тела на один и тот же угол $d\varphi$ (но относительно различных осей), в то время как $d\mathbf{s}_п$ и $d\mathbf{s}_в$ оказываются различными.

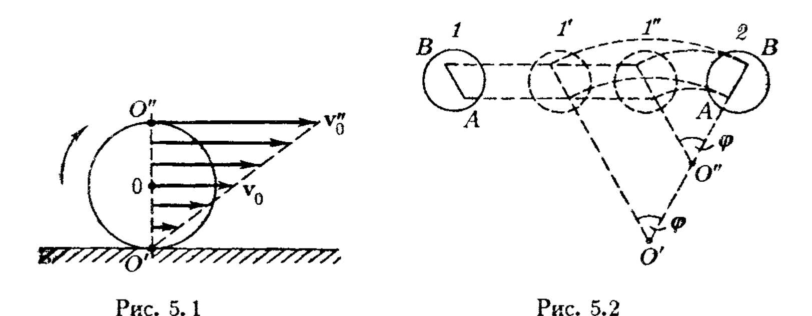


Рис. 5.1

Рис. 5.2

Разделив $d\mathbf{s}$ на соответствующий промежуток времени dt, получим скорость точки

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{s}}{dt} = \frac{d\mathbf{s}_п}{dt} + \frac{d\mathbf{s}_в}{dt} = \mathbf{v}_0 + \mathbf{v}',$$

где $\mathbf{v}_0$ — одинаковая для всех точек тела скорость поступательного движения и $\mathbf{v}'$ — различная для разных точек тела скорость, обусловленная вращением.

Таким образом, плоское движение твердого тела можно представить как сумму двух движений — поступательного со скоростью $\mathbf{v}_0$ и вращательного с угловой скоростью $\boldsymbol{\omega}$ (вектор $\boldsymbol{\omega}$ на рис. 5.1 направлен перпендикулярно к плоскости чертежа, «от нас»). Подобное представление сложного движения можно осуществить множеством способов, различающихся значениями $\mathbf{v}_0$ и $\mathbf{v}'$, но соответствующих одной и той же угловой скорости $\boldsymbol{\omega}$. Например, движение цилиндра, катящегося без скольжения по плоскости (см. рис. 5.1), можно представить как поступательное движе-

ние со скоростью $\mathbf{v}_0$ и одновременное вращение с угловой скоростью $\boldsymbol{\omega}$ вокруг оси O, либо как поступательное движение со скоростью $\mathbf{v}_0'' = 2\mathbf{v}_0$ и вращение с той же угловой скоростью $\boldsymbol{\omega}$ вокруг оси O'', либо, наконец, как одно только вращение опять-таки с той же угловой скоростью $\boldsymbol{\omega}$ вокруг оси O'.

Назвав систему отсчета, относительно которой мы рассматриваем сложное движение твердого тела, неподвижной, движение тела можно представить как вращение с угловой скоростью $\boldsymbol{\omega}$ в системе отсчета, которая движется относительно неподвижной системы поступательно со скоростью $\mathbf{v}_0$.

Линейная скорость $\mathbf{v}'$ точки с радиусом-вектором $\mathbf{r}$, обусловленная вращением твердого тела, равна $\mathbf{v}' = [\boldsymbol{\omega}\mathbf{r}]$ (см. (1.100)). Следовательно, скорость этой точки при сложном движении может быть представлена в виде

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_0 + [\boldsymbol{\omega}\mathbf{r}]. \tag{5.1}$$

Элементарное перемешение твердого тела при плоском движении всегда можно представить как поворот вокруг некоторой оси, называемой **мгновенной осью вращения**. Эта ось может лежать в пределах тела либо вне его. Положение мгновенной оси вращения относительно неподвижной системы отсчета и относительно самого тела, вообще говоря, меняется со временем. В случае катящегося цилиндра (см. рис. 5.1) мгновенная ось O' совпадает с линией касания цилиндра с плоскостью. При качении цилиндра мгновенная ось перемещается как по плоскости (т. е. относительно неподвижной системы отсчета), так и по поверхности цилиндра.

Скорости всех точек тела для каждого момента времени можно считать обусловленными вращением вокруг соответствующей мгновенной оси. Следовательно, **плоское движение** твердого тела можно рассматривать как ряд последовательных элементарных вращений вокруг мгновенных осей.

При неплоском движении элементарное перемещение тела можно представить как поворот вокруг мгновенной оси лишь в том случае, если векторы $\mathbf{v}_0$ и $\boldsymbol{\omega}$ взаимно перпендикулярны. Если угол между этими векторами отличен от $\pi/2$, движение тела в каждый момент времени будет наложением двух движений — вращения вокруг некоторой оси и поступательного движения вдоль этой оси.

5.2. Движение центра масс твердого тела

Разбив тело на элементарные массы m_i, можно представить его как систему материальных точек, взаимное расположение которых остается неизменным. Любая из этих элементарных масс может находиться под воздействием как внутренних сил, обусловленных ее взаимодействием с другими элементарными массами рассматриваемого тела, так и внешних сил. Например, если тело находится в поле сил земного тяготения, на каждую элементарную массу тела m_i будет действовать внешняя сила, равная $m_i\mathbf{g}$.

Напишем для каждой элементарной массы уравнение второго закона Ньютона:

$$m_i\mathbf{w}_i = \mathbf{f}_i + \mathbf{F}_i, \tag{5.2}$$

где $\mathbf{f}_i$ — результирующая всех внутренних сил, а $\mathbf{F}_i$ — результирующая всех внешних сил, приложенных к данной элементарной массе. Сложив уравнение (5.2) для всех элементарных масс, получим выражение

$$\sum m_i\mathbf{w}_i = \sum \mathbf{f}_i + \sum \mathbf{F}_i. \tag{5.3}$$

Однако сумма всех внутренних сил, действующих в системе, равна нулю. Поэтому уравнение (5.3) упрощается следующим образом:

$$\sum m_i\mathbf{w}_i = \sum \mathbf{F}_i. \tag{5.4}$$

Здесь справа стоит результирующая всех внешних сил, действующих на тело.

Сумму, стоящую в левой части формулы (5.4), можно заменить произведением массы тела m на ускорение его центра масс $\mathbf{w}_C$. Действительно, согласно (3.91)

$$\sum m_i\mathbf{r}_i = m\mathbf{r}_C.$$

Продифференцировав это соотношение дважды по времени и приняв во внимание, что $\ddot{\mathbf{r}}_i = \mathbf{w}_i$, а $\ddot{\mathbf{r}}_C = \mathbf{w}_C$, можно написать

$$\sum m_i\mathbf{w}_i = m\mathbf{w}_C. \tag{5.5}$$

Сопоставив формулы (5.4) и (5.5), придем к уравнению

$$m\mathbf{w}_C = \sum \mathbf{F}_{\text{внешн}}, \tag{5.6}$$

которое означает, что *центр масс твердого тела движется так, как двигалась бы материальная точка с массой, равной массе тела, под действием всех приложенных к телу сил.*

Уравнение (5.6) дает возможность установить движение центра масс твердого тела, если известны масса тела и действующие на него силы. В случае поступательного движения это уравнение будет определять ускорение не только центра масс, но и любой другой точки тела.

5.3. Вращение тела вокруг неподвижной оси

Рассмотрим твердое тело, которое может вращаться вокруг неподвижной вертикальной оси (рис. 5.3). Чтобы удержать ось от перемещений в пространстве, заключим ее в подшипники. Опирающийся на нижний подшипник фланец *Фл* предотвращает перемещение оси в вертикальном направлении.

Абсолютно твердое тело можно рассматривать как систему частиц (материальных точек) с неизменными расстояниями между ними. Для всякой системы частиц справедливо полученное в § 3.12 уравнение

$$\frac{d}{dt}\mathbf{M} = \sum \mathbf{N}_{\text{внешн}} \tag{5.7}$$

(см. (3.118)). Это уравнение справедливо и для твердого тела. В последнем случае $\mathbf{M}$ есть момент импульса тела; справа в (5.7) стоит сумма моментов внешних сил, действующих на тело.

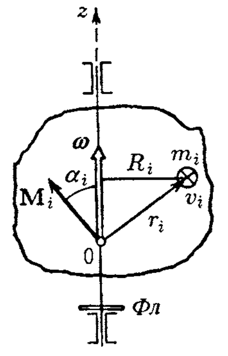


Рис. 5.3

Возьмем на оси вращения точку O и будем характеризовать положение образующих тело частиц с помощью радиусов-векторов $\mathbf{r}$, проведенных из этой точки (на рис. 5.3 показана i-я частица с массой m_i; кружком с крестиком показана скорость $\mathbf{v}_i$ частицы, направленная «от

нас»). Согласно (3.105) момент импульса i-й частицы относительно точки O равен

$$\mathbf{M}_i = [\mathbf{r}_i, m_i \mathbf{v}_i] = m_i [\mathbf{r}_i \mathbf{v}_i]. \tag{5.8}$$

Векторы $\mathbf{r}_i$ и $\mathbf{v}_i$ для всех частиц тела взаимно перпендикулярны. Поэтому модуль вектора (5.8) равен

$$M_i = m_i r_i v_i = m_i r_i \omega R_i, \tag{5.9}$$

где R_i — расстояние частицы от оси вращения (см. формулу (1.99)).

Отметим, что согласно (5.9) модуль вектора $\mathbf{M}_i$ пропорционален скорости вращения тела ω; направление же вектора $\mathbf{M}_i$ от ω не зависит — этот вектор лежит в плоскости, проходящей через ось вращения и частицу m_i, и перпендикулярен к $\mathbf{r}_i$.

Легко убедиться в том, что для всех образующих тело частиц угол между векторами $\mathbf{M}_i$ и $\boldsymbol{\omega}$ является острым. Поэтому проекции этих векторов на совпадающую с осью вращения ось z имеют одинаковые знаки. С учетом этого можно написать, что

$$M_{zi} = M_i \cos\alpha_i = m_i r_i \omega R_i \cos\alpha_i = \\ = m_i (r_i \cos\alpha_i) R_i \omega = m_i R_i^2 \omega_z. \tag{5.10}$$

Здесь α_i — угол между вектором $\mathbf{M}_i$ и осью z. При изменении направления оси z на обратное обе проекции — M_{zi} и ω_z — изменяют знак, однако равенство (5.10) остается справедливым.

Просуммировав выражение (5.10) по всем частицам, получим момент импульса тела относительно совпадающей с осью вращения оси z:

$$M_z = \sum M_{zi} = \sum m_i R_i^2 \omega_z = \omega_z \sum m_i R_i^2. \tag{5.11}$$

Величина I, равная сумме произведений элементарных масс на квадраты их расстояний от некоторой оси, называется моментом инерции тела относительно данной оси:

$$I = \sum m_i R_i^2. \tag{5.12}$$

Суммирование производится по всем элементарным массам m_i, на которые можно разбить тело.

Приняв во внимание формулу (5.12), выражение (5.11) можно представить в виде

$$M_z = I\omega_z. \qquad (5.13)$$

Полученная формула аналогична формуле $p_z = mv_z$. Роль массы играет момент инерции, роль линейной скорости — угловая скорость.

Из вида выражения (5.13) следует, что величина M_z не зависит от того, относительно какой точки O (лежащей на оси вращения) берется момент $\mathbf{M}$.

Согласно (3.119)

$$\frac{d}{dt}M_z = \sum N_{z\,\text{внешн}}.$$

Подставив сюда выражение (5.13) для M_z, придем к уравнению

$$I\beta_z = \sum N_{z\,\text{внешн}}, \qquad (5.14)$$

где $\beta_z = \dot{\omega}_z$ есть проекция углового ускорения на ось z. Уравнение (5.14) аналогично уравнению $mw_z = \sum F_z$. Роль массы играет момент инерции, роль линейного ускорения — угловое ускорение и, наконец, роль результирующей силы — суммарный момент внешних сил.

Сумма выражений (5.8) дает момент импульса тела относительно точки O (см. рис. 5.3):

$$\mathbf{M} = \sum \mathbf{M}_i = \sum m_i[\mathbf{r}_i\mathbf{v}_i]. \qquad (5.15)$$

В общем случае вектор $\mathbf{M}$ не совпадает по направлению с осью вращения тела z и поворачивается вместе с телом вокруг этой оси, описывая конус (рис. 5.4).

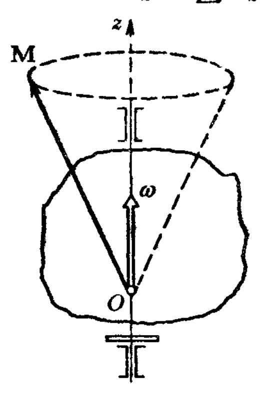


Рис. 5.4

Из соображений симметрии ясно, что для однородного[1]) тела, симметричного относительно оси вращения (для однородного тела вращения), момент импульса отно-

[1]) В механике однородным называется тело с одинаковой во всем объеме плотностью (см. § 5.4).

сительно точки O, лежащей на оси вращения, совпадает по направлению с вектором $\boldsymbol{\omega}$. В этом случае модуль момента импульса M равен $|M_z|$ — модулю проекции $\mathbf{M}$ на ось z. Приняв во внимание выражение (5.13), получим, что

$$M = I|\omega_z| = I\omega.$$

Рис. 5.5

Наконец, учтя, что векторы $\mathbf{M}$ и $\boldsymbol{\omega}$ имеют одинаковое направление, придем к соотношению

$$\mathbf{M} = I\boldsymbol{\omega}. \tag{5.16}$$

Напомним, что в отличие от соотношения (5.13), справедливого для любого тела, соотношение (5.16) имеет место лишь в случае тела, вращающегося вокруг оси симметрии, а также, как мы увидим ниже, для несимметричного тела, вращающегося вокруг одной из своих главных осей инерции.

В случае, когда ось вращения проходит через центр масс тела C, значение момента $\mathbf{M}$ не зависит от положения на оси вращения точки O, относительно которой он берется. Действительно, возьмем на оси вращения точки O и O', смещенные относительно друг друга на отрезок $\mathbf{a}$ (рис. 5.5). Из рисунка видно, что $\mathbf{r}'_i = \mathbf{a} + \mathbf{r}_i$. Момент импульса относительно точки O' равен

$$\mathbf{M}' = \sum m_i[\mathbf{r}'_i\,\mathbf{v}_i] = \sum m_i[(\mathbf{a} + \mathbf{r}_i)\,\mathbf{v}_i] = \\ = \sum m_i[\mathbf{a}\,\mathbf{v}_i] + \sum m_i[\mathbf{r}_i\,\mathbf{v}_i].$$

Второе слагаемое в правой части представляет собой момент импульса $\mathbf{M}$ относительно точки O. Первое слагаемое можно преобразовать следующим образом:

$$\sum m_i[\mathbf{a}\,\mathbf{v}_i] = [\mathbf{a}, \sum m_i\mathbf{v}_i] = [\mathbf{a}, m\mathbf{v}_C].$$

Поскольку центр масс лежит на оси вращения, $\mathbf{v}_C = 0$ и, следовательно, $\mathbf{M}' = \mathbf{M}$. Для однородного тела, вращающегося вокруг оси симметрии, независимость $\mathbf{M}$ от положения точки O вытекает из вида формулы (5.16).

В случае вращения вокруг вертикальной оси однородного симметричного тела силы бокового давления подшипников на ось (см. рис. 5.3) не возникают. В отсутствие силы тяжести подшипники можно было бы убрать — ось и без них сохраняла бы свое положение в пространстве. Ось, положение которой в пространстве остается неизменным при вращении вокруг нее тела в отсутствие внешних сил, называется *свободной осью* тела.

Можно доказать, что для тела любой формы и с произвольным распределением массы существуют три взаимно перпендикулярные, проходящие через центр масс тела оси, которые могут служить свободными осями; они называются *главными осями инерции* тела.

У однородного параллелепипеда (рис. 5.6) главными осями инерции будут, очевидно, оси O_1O_1, O_2O_2 и O_3O_3, проходящие через центры противолежащих граней.

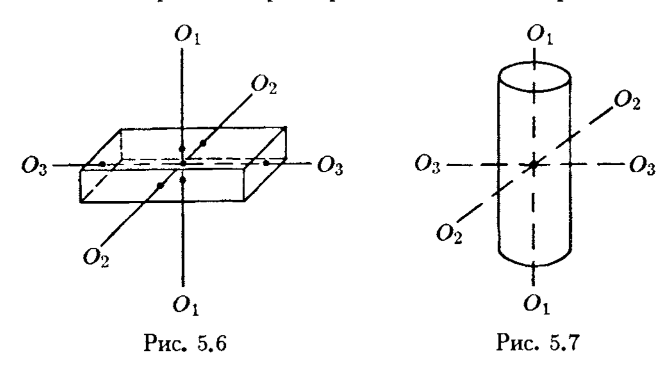


Рис. 5.6 Рис. 5.7

У тела, обладающего осевой симметрией (например, у однородного²) цилиндра), одной из главных осей инерции является ось симметрии, в качестве двух других осей могут служить две любые взаимно перпендикулярные оси, лежащие в плоскости, перпендикулярной к оси симметрии, и проходящие через центр масс тела (рис. 5.7). Таким образом, у тела с осевой симметрией фиксирована только одна из главных осей инерции.

У тела с центральной симметрией, т. е. у шара, плотность которого зависит только от расстояния от центра, главными осями инерции являются три любые взаимно перпендикулярные оси, проходящие через центр масс.

²) Достаточно, чтобы плотность тела была в каждом сечении функцией только расстояния от оси симметрии.

Следовательно, ни одна из главных осей инерции не фиксирована.

Моменты инерции относительно главных осей называются главными моментами инерции тела. В общем случае эти моменты различны: $I_1 \neq I_2 \neq I_3$. Для тела с осевой симметрией два главных момента инерции имеют одинаковые значения, третий же, вообще говоря, отличен от них: $I_1 = I_2 \neq I_3$. И, наконец, в случае тела с центральной симметрией все три главных момента инерции одинаковы: $I_1 = I_2 = I_3$.

Равными значениями главных моментов инерции обладает не только однородный шар, но и, скажем, однородный куб. В общем случае такое равенство может наблюдаться при надлежащем распределении массы для тела совершенно произвольной формы. Все подобные тела называют шаровыми волчками. Характерным для них является то, что любая ось, проходящая через центр масс, обладает свойствами свободной оси и, следовательно, ни одна из главных осей инерции не фиксирована, как и для шара. Все шаровые волчки ведут себя при вращении в идентичных условиях одинаковым образом.

Тела, для которых $I_1 = I_2 \neq I_3$, ведут себя как однородные тела вращения. Их называют симметричными волчками. Наконец, тела с $I_1 \neq I_2 \neq I_3$ называют ассимметричными волчками.

Если тело вращается в условиях, когда какое-либо воздействие извне отсутствует, то устойчивым оказывается только вращение вокруг главных осей, соответствующих максимальному и минимальному значениям момента инерции. Вращение же вокруг оси, соответствующей промежуточному по величине моменту, будет неустойчивым. Это означает, что силы, возникающие при малейшем отклонении оси вращения от этой главной оси, действуют в таком направлении, что величина этого отклонения возрастает. При отклонении вращения от устойчивой оси под действием возникающих при этом сил тело возвращается к вращению вокруг соответствующей главной оси.

В сказанном можно убедиться, попытавшись подбросить какое-либо тело, имеющее форму параллелепипеда (например, коробок спичек), приведя его одновременно во вращение[3]). При этом обнаружится, что тело, падая, мо-

[3]) Воздействие силы тяжести в этом случае не является существенным. Оно лишь обусловливает происходящее наряду с вращением падение тела.

жет вращаться устойчиво вокруг осей, проходящих через наибольшие или наименьшие грани. Попытки же подбросить тело так, чтобы оно вращалось вокруг оси, проходящей через средние грани, будут безуспешными.

При наличии внешнего воздействия, например со стороны нити, за которую подвешено вращающееся тело, устойчивым оказывается только вращение вокруг главной оси, соответствующей наибольшему значению момента инерции. По этой причине тонкий стержень, подвешенный на нити, прикрепленной к его концу, при быстром вращении будет в конечном итоге вращаться вокруг

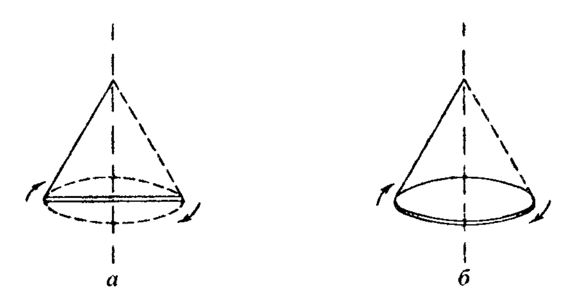


Рис. 5.8

перпендикулярной к нему оси, проходящей через центр (рис. 5.8 *а*). Аналогичным образом ведет себя диск, подвешенный на прикрепленной к его краю нити (рис. 5.8 *б*).

До сих пор речь шла о телах с неизменным распределением массы. Теперь предположим, что твердое тело может на какое-то время утрачивать свойство неизменности взаимного расположения его частей, причем в течение этого времени происходит перераспределение массы тела, в результате которого момент инерции изменяется от значения I_1 до значения I_2. Если такое перераспределение осуществляется в условиях, когда $\sum \mathbf{N}_{\text{внешн}} = 0$, то согласно закону сохранения момента импульса должно выполняться равенство

$$I_1\omega_1 = I_2\omega_2, \tag{5.17}$$

где ω_1 — исходное, а ω_2 — конечное значение угловой скорости тела. Таким образом, изменение момента инерции влечет за собой соответствующее изменение угловой скорости. Этим объясняется обычно демонстрируемое явле-

ние, заключающееся в том, что человек, стоящий на вертящейся скамье, разводя руки в стороны, начинает вращаться медленнее, а прижимая руки к туловищу, начинает вращаться быстрее.

5.4. Момент инерции

Из определения (см. (5.12))

$$I = \sum \Delta m_i R_i^2$$

видно, что момент инерции есть величина аддитивная[4]). Это означает, что момент инерции тела равен сумме моментов инерции его частей.

Понятие момента инерции было введено нами при рассмотрении вращения твердого тела. Однако следует иметь в виду, что эта величина существует безотносительно к вращению. Каждое тело независимо от того, вращается оно или покоится, обладает определенным моментом инерции относительно любой оси, подобно тому как тело обладает массой независимо от того, движется оно или находится в покое.

Распределение массы в пределах тела можно охарактеризовать величиной, называемой п л о т н о с т ь ю. Если тело однородно, т. е. свойства его во всех точках одинаковы, то плотностью называется величина, равная

$$\rho = m/V, \tag{5.18}$$

где m — масса тела, а V — его объем. Таким образом, в случае однородного тела плотность представляет собой массу единицы объема тела.

Для тела с неравномерно распределенной массой выражение (5.18) дает среднюю плотность. Плотность в данной точке определяется в этом случае следующим образом:

$$\rho = \lim_{\Delta V \to 0} \frac{\Delta m}{\Delta V} = \frac{dm}{dV}. \tag{5.19}$$

В этом выражении Δm — масса, заключенная в объеме ΔV, который при предельном переходе стягивается к той точке, в которой определяется плотность.

---

[4]) В этом параграфе целесообразно обозначить элементарную массу тела символом Δm_i вместо m_i.

Предельный переход в (5.19) нельзя понимать так, что ΔV стягивается буквально в точку. При таком понимании для двух практически совпадающих точек, одна из которых приходится на ядро атома, а другая — на промежуток между ядрами, получался бы сильно различающийся результат (для первой точки огромная величина, а для второй — нуль). Поэтому уменьшение ΔV следует производить до тех пор, пока не будет получен физически бесконечно малый объем, под которым понимают такой объем, который, с одной стороны, достаточно мал для того, чтобы макроскопические (т. е. присущие большой совокупности атомов) свойства в пределах его можно было считать одинаковыми, а с другой стороны, достаточно велик для того, чтобы не могла проявиться дискретность (прерывность) вещества.

Согласно (5.19) элементарная масса Δm_i равна произведению плотности тела ρ_i в данной точке на соответствующий элементарный объем ΔV_i:

$$\Delta m_i = \rho_i \Delta V_i.$$

Следовательно, момент инерции можно представить в виде

$$I = \sum \rho_i R_i^2 \Delta V_i. \qquad (5.20)$$

Если плотность тела постоянна, ее можно вынести за знак суммы:

$$I = \rho \sum R_i^2 \Delta V_i. \qquad (5.21)$$

Соотношения (5.20) и (5.21) являются приближенными, причем тем более точными, чем меньше элементарные объемы ΔV_i и соответствующие им элементарные массы Δm_i. Следовательно, задача нахождения моментов инерции сводится к интегрированию:

$$I = \int R^2\, dm = \int \rho R^2\, dV. \qquad (5.22)$$

Интегралы в (5.22) берутся по всему объему тела. Величины ρ и R в этих интегралах являются функциями точки, т. е., например, декартовых координат x, y и z.

В качестве примера найдем момент инерции однородного диска относительно оси, перпендикулярной к плоско-

сти диска и проходящей через его центр (рис. 5.9). Разобьем диск на кольцевые слои толщины dR. Все точки одного слоя будут находиться на одинаковом расстоянии от оси, равном R. Объем такого слоя равен

$$dV = b \cdot 2\pi R\, dR,$$

где b — толщина диска. Поскольку диск однороден, плотность его во всех точках одинакова и ρ в (5.22) можно вынести за знак интеграла:

$$I = \rho \int R^2\, dV = \rho \int_0^{R_0} R^2 b \cdot 2\pi R\, dR,$$

где R_0 — радиус диска. Вынесем за знак интеграла постоянный множитель $2\pi b$:

$$I = 2\pi b\rho \int_0^{R_0} R^3\, dR = 2\pi b\rho \frac{R_0^4}{4}.$$

Наконец, введя массу диска m, равную произведению плотности ρ на объем диска $b\pi R_0^2$, получим

$$I = \frac{mR_0^2}{2}. \tag{5.23}$$

Нахождение момента инерции в рассмотренном примере значительно упрощалось вследствие того, что тело было однородным и симметричным, а момент инерции

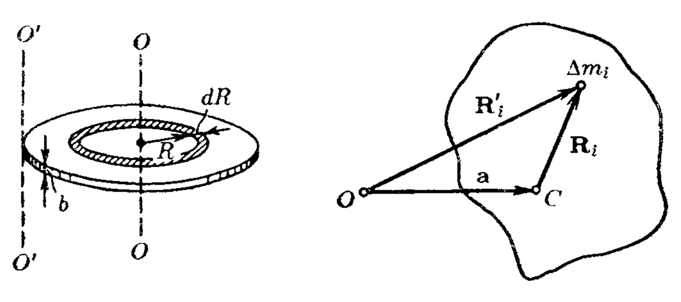


Рис. 5.9 Рис. 5.10

мы искали относительно оси симметрии. Если бы мы захотели найти момент инерции диска относительно, например, оси $O'O'$, перпендикулярной к диску и проходящей через его край (см. рис. 5.9), вычисления, очевидно, оказались бы гораздо более сложными. В подобных случаях нахождение момента инерции значительно облегчается, если воспользоваться **теоремой Штейнера**[5], которая формулируется следующим образом: *момент инерции I относительно произвольной оси равен сумме момента инерции I_C относительно оси, параллельной данной и проходящей через центр масс тела, и произведения массы тела m на квадрат расстояния a между осями*:

$$I = I_C + ma^2. \tag{5.24}$$

В соответствии с теоремой Штейнера момент инерции диска относительно оси $O'O'$ равен найденному нами моменту инерции (5.23) относительно оси, проходящей через центр диска, плюс mR_0^2 (расстояние между осями $O'O'$ и OO равно радиусу диска R_0):

$$I = \frac{mR_0^2}{2} + mR_0^2 = \frac{3}{2}mR_0^2.$$

Таким образом, теорема Штейнера, по существу, сводит вычисление момента инерции относительно произвольной оси к вычислению момента инерции относительно оси, проходящей через центр масс тела.

Для доказательства теоремы Штейнера рассмотрим ось C, проходящую через центр масс тела, и параллельную ей ось O, отстоящую от оси C на расстояние a (рис. 5.10; обе оси перпендикулярны к плоскости чертежа). Обозначим через $\mathbf{R}_i$ перпендикулярный к оси C вектор, проведенный от оси к элементарной массе Δm_i, а через $\mathbf{R}_i'$ — аналогичный вектор, проведенный от оси O. Введем также перпендикулярный к осям вектор $\mathbf{a}$, соединяющий соответствующие точки осей O и C. Для любой пары противолежащих точек этот вектор имеет одинаковый модуль (равный расстоянию a между осями) и одинаковое направление. Между перечисленными векторами имеется соотношение

$$\mathbf{R}_i' = \mathbf{a} + \mathbf{r}_i.$$

[5]) Якоб Штейнер (1796–1863) — швейцарский математик.

Квадрат расстояния элементарной массы Δm_i от оси C равен $R_i^2 = \mathbf{R}_i^2$, а от оси O он составит

$$R_i'^2 = (\mathbf{a} + \mathbf{R}_i)^2 = a^2 + 2\mathbf{a}\mathbf{R}_i + R_i^2.$$

С учетом последнего соотношения момент инерции тела относительно оси O можно представить в виде

$$I = \sum \Delta m_i R_i'^2 = a^2 \sum \Delta m_i + 2\mathbf{a} \sum \Delta m_i \mathbf{R}_i + \sum \Delta m_i R_i^2 \tag{5.25}$$

(постоянные множители мы вынесли за знак суммы). Последний член в этом выражении есть момент инерции тела относительно оси C. Обозначим его I_C. Сумма элементарных масс дает массу тела m. Сумма $\sum \Delta m_i \mathbf{R}_i$ равна произведению массы тела на вектор $\mathbf{R}$, проведенный от оси C к центру масс тела. Поскольку центр инерции лежит на оси C, этот вектор $\mathbf{R}$, а следовательно, и второй член в (5.25) равны нулю. Таким образом, мы приходим к выводу, что

$$I = ma^2 + I_C,$$

а это и требовалось доказать (см. (5.24)).

В заключение приведем значения моментов инерции для некоторых тел (тела предполагаются однородными, m — масса тела).

1. Тело представляет собой тонкий длинный стержень с сечением любой формы. Максимальный поперечный размер стержня b во много раз меньше длины стержня l ($b \ll l$). Момент инерции относительно оси, перпендикулярной к стержню и проходящей через его середину (рис. 5.11), равен

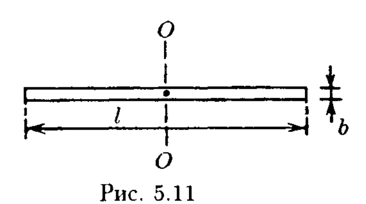


Рис. 5.11

$$I = \frac{1}{12} ml^2.$$

2. Для диска или цилиндра при любом отношении R к l (рис. 5.12) момент инерции относительно оси, совпадающей с геометрической осью цилиндра, равен

$$I = \frac{1}{2} mR^2.$$

3. Тело — тонкий диск. Толщина диска b во много раз меньше радиуса диска R ($b \ll R$). Момент инерции отно-

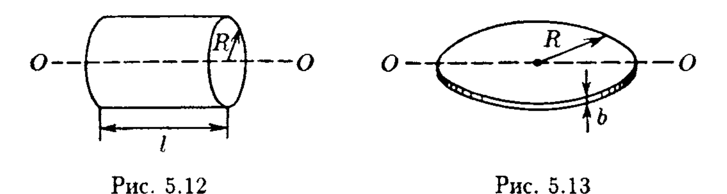


Рис. 5.12 Рис. 5.13

сительно оси, совпадающей с диаметром диска (рис. 5.13), равен

$$I = \frac{1}{4}mR^2.$$

4. Момент инерции шара радиуса R относительно оси, проходящей через его центр, равен

$$I = \frac{2}{5}mR^2.$$

5.5. Понятие о тензоре инерции

В § 5.3 мы установили, что для однородного тела, вращающегося относительно оси симметрии, связь между векторами $\mathbf{M}$ и $\boldsymbol{\omega}$ имеет очень простой вид

$$\mathbf{M} = I\boldsymbol{\omega} \qquad (5.26)$$

(см. (5.16)) или

$$M_x = I\omega_x, \quad M_y = I\omega_y, \quad M_z = I\omega_z. \qquad (5.27)$$

Это объясняется тем, что для такого тела векторы $\mathbf{M}$ и $\boldsymbol{\omega}$ коллинеарны. Однако в общем случае векторы $\mathbf{M}$ и $\boldsymbol{\omega}$ образуют угол, отличный от нуля (см. рис. 5.4), так что связь между ними не может быть выражена формулой (5.26).

Попытаемся выяснить, как можно связать аналитически векторы $\mathbf{M}$ и $\boldsymbol{\omega}$ в самом общем случае. Будем исходить из того, что модули $\mathbf{M}$ и $\boldsymbol{\omega}$ пропорциональны друг другу. Действительно, согласно (5.9) модули элементарных векторов $\mathbf{M}_i$ пропорциональны модулю ω, следовательно, и модуль суммы этих векторов также пропорционален ω. Легко сообразить, что такая пропорциональность

получится в том случае, если каждая компонента вектора **M** будет зависеть линейно от компонент вектора $\boldsymbol{\omega}$:

$$\begin{aligned} M_x &= I_{xx}\omega_x + I_{xy}\omega_y + I_{xz}\omega_z, \\ M_y &= I_{yx}\omega_x + I_{yy}\omega_y + I_{yz}\omega_z, \\ M_z &= I_{zx}\omega_x + I_{zy}\omega_y + I_{zz}\omega_z. \end{aligned} \tag{5.28}$$

Здесь величины I_{xx}, I_{xy} и т. д. суть коэффициенты пропорциональности, имеющие размерность момента инерции (ср. с (5.27)). При увеличении ω в некоторое число раз в такое же количество раз увеличится каждая из компонент ω_x, ω_y, ω_z и соответственно каждая из компонент M_x, M_y, M_z, а значит, и сам вектор **M**.

Взаимная ориентация векторов **M** и $\boldsymbol{\omega}$ определяется значениями коэффициентов пропорциональности. Пусть, например, $I_{xx} = I_{yy} = I_{zz} = I$, а остальные коэффициенты равны нулю. Тогда формулы (5.28) переходят в соотношения (5.27), т. е. векторы **M** и $\boldsymbol{\omega}$ оказываются коллинеарными. Теперь допустим, что вектор $\boldsymbol{\omega}$ направлен вдоль оси z и коэффициенты I_{xz}, I_{yz}, I_{zz} отличны от нуля. В этом случае $\omega_z = \omega$, $\omega_x = \omega_y = 0$. Подстановка этих значений в (5.28) дает

$$M_x = I_{xz}\omega \neq 0, \quad M_y = I_{yz}\omega \neq 0, \quad M_z = I_{zz}\omega \neq 0,$$

Все три компоненты вектора **M** оказались отличными от нуля, значит, вектор **M** образует с направленным по оси z вектором $\boldsymbol{\omega}$ некоторый угол.

Из сказанного вытекает, что в самом общем случае связь между моментом импульса и угловой скоростью тела может быть выражена с помощью формул (5.28). Аналогичные формулы могут быть написаны для любых векторов **a** и **b**, модули которых пропорциональны друг другу:

$$\begin{aligned} b_x &= T_{xx}a_x + T_{xy}a_y + T_{xz}a_z, \\ b_y &= T_{yx}a_x + T_{yy}a_y + T_{yz}a_z, \\ b_z &= T_{zx}a_x + T_{zy}a_y + T_{zz}a_z. \end{aligned} \tag{5.29}$$

Эти три формулы можно записать компактно в виде одного выражения:

$$b_i = \sum_{k=x,y,z} T_{ik}a_k \quad (i = x, y, z) \tag{5.30}$$

Положив $i = x$ и осуществив суммирование, при котором индекс k пробегает значения x, y, z, получим первую из формул (5.29); положив $i = y$, получим вторую из формул и т. д.

Совокупность девяти величин T_{xx}, T_{xy}, ..., T_{zz} именуют тензором второго ранга[6]), а операцию, выражаемую формулами (5.29), называют умножением вектора **a** на тензор **T**. В результате такого умножения получается новый вектор **b**.

Тензор принято записывать в виде квадратной таблицы:

$$\mathbf{T} = \begin{pmatrix} T_{xx} & T_{xy} & T_{xz} \\ T_{yx} & T_{yy} & T_{yz} \\ T_{zx} & T_{zy} & T_{zz} \end{pmatrix} \tag{5.31}$$

(вместо индексов x, y, z можно писать индексы 1, 2, 3). Величины T_{xx}, T_{xy}, ... называются компонентами тензора. Расположенные по диагонали компоненты T_{xx}, T_{yy}, T_{zz} называются диагональными. Значения компонент зависят от выбора координатных осей, на которые проецируются векторы **a** и **b** (от выбора осей зависят и компоненты этих векторов).

Из сопоставления формул (5.28) и (5.29) вытекает, что коэффициенты в формулах (5.28) суть компоненты тензора второго ранга:

$$\mathbf{I} = \begin{pmatrix} I_{xx} & I_{xy} & I_{xz} \\ I_{yx} & I_{yy} & I_{yz} \\ I_{zx} & I_{zy} & I_{zz} \end{pmatrix}. \tag{5.32}$$

Его называют тензором инерции тела. Этот тензор характеризует инертные свойства тела при вращении.

Чтобы найти значения компонент тензора инерции, будем исходить из определения момента импульса тела:

$$\mathbf{M} = \sum m_i[\mathbf{r}_i \mathbf{v}_i] \tag{5.33}$$

[6]) Тензором второго ранга называется совокупность девяти величин T_{xy}, .., T_{zz}, преобразующихся при поворотах координатных осей по определенным правилам (см. Приложение)

(см. (5.15)). Векторы $\mathbf{r}_i$ будем откладывать от центра масс тела (рис. 5.14). Заменим в выражении (5.33) скорость $\mathbf{v}_i$ векторным произведением $[\boldsymbol{\omega}\mathbf{r}_i]$ (см. формулу (1.100)). В результате получим

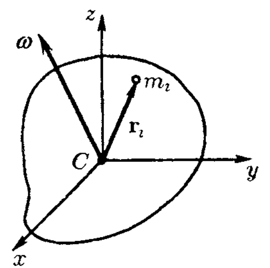


Рис. 5.14

$$\mathbf{M} = \sum m_i[\mathbf{r}_i[\boldsymbol{\omega}\mathbf{r}_i]].$$

Теперь воспользуемся формулой (1.35):

$$\mathbf{M} = \sum m_i\{\boldsymbol{\omega}(\mathbf{r}_i\mathbf{r}_i) - \mathbf{r}_i(\mathbf{r}_i\boldsymbol{\omega})\}. \tag{5.34}$$

Напомним, что суммирование осуществляется по всем элементарным массам, на которые мысленно разбито тело.

Свяжем с телом декартову систему координат[7]) (см. рис. 5.14) и распишем скалярные произведения, фигурирующие в выражении (5.34), через компоненты векторов $\boldsymbol{\omega}$ и $\mathbf{r}_i$ по осям этой системы (см. (1.23)). Начало координат поместим в центр масс тела C (напомним, что из этой точки мы откладывали векторы $\mathbf{r}_i$). Учтя, что $r_{xi} = x_i$, $r_{yi} = y_i$, $r_{zi} = z_i$, получим

$$\mathbf{M} = \sum m_i\{\boldsymbol{\omega}(x_i^2+y_i^2+z_i^2)-\mathbf{r}_i(x_i\omega_x+y_i\omega_y+z_i\omega_z)\}. \tag{5.35}$$

Найдем проекцию этого вектора на ось x:

$$M_x = \sum m_i\{\omega_x(x_i^2 + y_i^2 + z_i^2) - x_i(x_i\omega_x + y_i\omega_y + z_i\omega_z)\} =$$

$$= \omega_x \sum m_i(y_i^2 + z_i^2) - \omega_y \sum m_i x_i y_i - \omega_z \sum m_i x_i z_i. \tag{5.36}$$

Аналогично находятся проекции вектора $\mathbf{M}$ на оси y и z:

$$M_y = -\omega_x \sum m_i y_i x_i + \omega_y \sum m_i(x_i^2 + z_i^2) - \omega_z \sum m_i y_i z_i, \tag{5.37}$$

$$M_z = -\omega_x \sum m_i z_i x_i - \omega_y \sum m_i z_i y_i + \omega_z \sum m_i(x_i^2 + y_i^2). \tag{5.38}$$

[7]) Подчеркнем, что оси этой системы жестко связаны с телом и вращаются вместе с ним.

Сравнение полученных нами выражений с формулами (5.28) позволяет найти значения компонент тензора инерции. Выпишем эти значения сразу в виде таблицы:

$$I = \begin{pmatrix} \sum m_i(y_i^2 + x_i^2) & -\sum m_i x_i y_i & -\sum m_i x_i z_i \\ -\sum m_i y_i x_i & \sum m_i(x_i^2 + z_i^2) & -\sum m_i y_i z_i \\ -\sum m_i z_i x_i & -\sum m_i z_i y_i & \sum m_i(x_i^2 + y_i^2) \end{pmatrix}. \quad (5.39)$$

Диагональные компоненты тензора представляют собой рассмотренные в предыдущем параграфе моменты инерции относительно соответствующих координатных осей. Эти компоненты называются осевыми моментами инерции. Недиагональные компоненты называются центробежными моментами инерции. Заметим, что недиагональные компоненты тензора (5.39) удовлетворяют условию $I_{xy} = I_{yx}$, $I_{xz} = I_{zx}$, $I_{yz} = I_{zy}$. Тензор, удовлетворяющий такому условию, называется симметричным.

Практически компоненты тензора инерции вычисляются с помощью интегрирования. Например, компонента I_{xx} определяется по формуле

$$I_{xx} = \int \rho(x, y, z)(y^2 + z^2)\, dV,$$

где $\rho(x, y, z)$ — плотность, dV — элементарный объем. Интегрирование производится по всему объему тела.

Найдем компоненты тензора инерции для однородного прямоугольного параллелепипеда, выбрав оси координат так, как показано на рис. 5.15. Начало координат совпадает с центром масс тела C. Чтобы вычислить осевой момент инерции I_{zz}, разобьем тело на столбики с площадью основания, равной $dx\, dy$. Все элементы такого столбика имеют одинаковые значения координат x и y. Объем столбика равен $2c\, dx\, dy$, а его масса $dm = 2c\rho\, dx\, dy$. Поэтому вклад столбика в I_{zz} определяется выражением

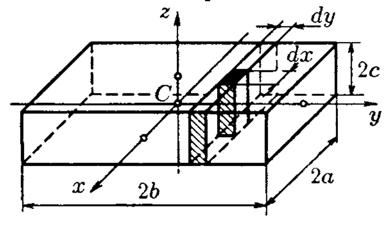


Рис. 5.15

$$dI_{zz\,\text{столбика}} = 2\rho c(x^2 + y^2)\, dx\, dy.$$

Проинтегрировав это выражение по x, найдем вклад в I_{zz}, который дает показанный на рис. 5.15 слой длины $2a$, ширины $2c$ и толщины dy:

$$dI_{zz\,\text{слоя}} = \int_{-a}^{+a} 2\rho c(x^2+y^2)\,dx\,dy = 2\rho c\,dy \int_{-a}^{+a} x^2\,dx + {} + 2\rho c y^2\,dy \int_{-a}^{+a} dx = \left(\frac{4}{3}\rho c a^3 + 4\rho c a y^2\right) dy \qquad (5.40)$$

(так как тело однородно, ρ не зависит от координат x, y, z).

Наконец, проинтегрировав выражение (5.40) по y, получим I_{zz} всего тела:

$$I_{zz} = \int_{-b}^{+b} \left(\frac{4}{3}\rho c a^3 + 4\rho c a y^2\right) dy = \frac{4}{3}\rho c a^3 \int_{-b}^{+b} dy + {} + 4\rho c a \int_{-b}^{+b} y^2\,dy = \frac{8}{3}\rho c a^3 b + \frac{8}{3}\rho c a b^3 = {} = \frac{1}{3}\rho(2a)(2b)(2c)(a^2+b^2) = \frac{1}{3}m(a^2+b^2)$$

(m — масса тела). Аналогичные вычисления дают

$$I_{xx} = \frac{1}{3}m(b^2+c^2), \qquad I_{yy} = \frac{1}{3}m(a^2+c^2).$$

Теперь вычислим один из центробежных моментов, например I_{xy}. Вклад в этот момент столбика с основанием $dx\,dy$ равен

$$dI_{xy\,\text{столбика}} = -\rho x y \cdot 2c\,dx\,dy,$$

а вклад слоя —

$$dI_{xy\,\text{слоя}} = -2\rho c y\,dy \int_{-a}^{+a} x\,dx = 0.$$

Соответственно и момент всего тела равен нулю. Аналогичный результат получается и для остальных центробежных моментов. Таким образом, при указанном на рисунке 5.15 выборе координатных осей тензор момента инер-

ции однородного прямоугольного параллелепипеда имеет вид

$$I = \begin{pmatrix} I_x & 0 & 0 \\ 0 & I_y & 0 \\ 0 & 0 & I_z \end{pmatrix} \tag{5.41}$$

(мы сохранили при диагональных компонентах по одному индексу).

Такой результат получился благодаря тому, что в качестве координатных осей были выбраны главные оси инерции тела (см. § 5.3). При ином выборе координатных осей центробежные моменты инерции оказываются отличными от нуля. В этом можно убедиться с помощью следующего рассуждения. При выборе осей, показанном на рис. 5.16 *а*, площади прямоугольников *1*, *2*, *3* и *4* одинаковы. На двух

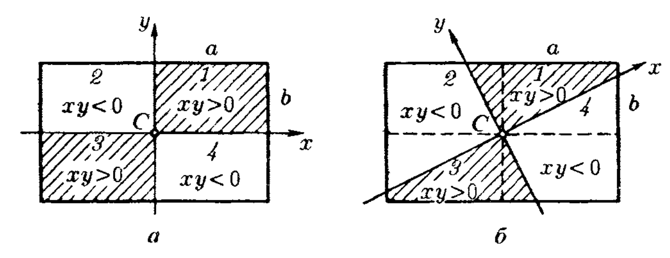


Рис. 5.16

из них произведение xy положительно, на двух — отрицательно. Это приводит к тому, что интеграл от xy, взятый по всей площади, оказывается равным нулю. При выборе осей, показанном на рис. 5.16 *б*, площади заштрихованных фигур *1* и *3* меньше площадей незаштрихованных фигур *2* и *4* ($a > b$). Поэтому интеграл от xy, взятый по суммарной площади, будет отличен от нуля. Соответственно отличен от нуля и центробежный момент I_{xy}.

Полученный результат является общим для всех тел, независимо от их формы и распределения массы. Если в качестве координатных осей взять главные оси инерции тела, тензор инерции будет иметь вид (5.41). Величины I_x, I_y, I_z (но не I_{xx}, I_{yy}, I_{zz} в (5.32); при повороте координатных осей изменяются все компоненты тензора, в том числе и диагональные) называются **главными моментами инерции** тела. Подчеркнем, что главными моментами инерции называются осевые моменты, вычисленные не в произвольных, а в **главных осях**.

Главные оси инерции взаимно перпендикулярны и пересекаются в центре масс тела. В общем случае (когда $I_x \neq I_y \neq I_z$) эти оси можно выбрать единственным способом. Для шарового волчка (т. е. тела, у которого $I_x = I_y = I_z$; см. § 5.3) положение главных осей оказывается совершенно неопределенным. У симметричного волчка ($I_x = I_y \neq I_z$) фиксирована лишь ось z, остальные две оси оказываются неопределенными.

Пусть тело вращается вокруг одной из своих главных осей инерции, скажем вокруг оси z. Выбрав главные оси в качестве координатных осей, получим, что $\omega_z = \omega$, $\omega_x = \omega_y = 0$. Поскольку при таком выборе координатных осей тензор инерции имеет вид (5.41), формулы (5.28) приводят к следующим значениям компонент момента импульса тела:

$$M_x = M_y = 0, \quad M_z = I_z\omega.$$

Следовательно, вектор $\mathbf{M}$ имеет такое же направление, как и $\boldsymbol{\omega}$. Такой же результат получается при вращении тела вокруг других главных осей. Во всех этих случаях

$$\mathbf{M} = I\boldsymbol{\omega}, \tag{5.42}$$

где I — соответствующий главный момент инерции тела. В § 5.3 мы получили такую формулу для однородного тела, вращающегося вокруг своей оси симметрии (см. (5.16)). Теперь мы установили, что формула (5.42) справедлива в тех случаях, когда произвольное тело вращается вокруг одной из своих главных осей инерции.

В заключение выясним, в каких случаях всегда справедливую формулу $\dot{\mathbf{M}} = \mathbf{N}$ (см. (5.7)) можно писать в виде

$$I\boldsymbol{\beta} = \mathbf{N}. \tag{5.43}$$

Прежде всего это, очевидно, можно делать, когда тело вращается вокруг главной оси и момент сил $\mathbf{N}$ направлен вдоль этой оси. Действительно, в этом случае момент сил $\mathbf{N}$ вызывает приращение $d\mathbf{M}$, коллинеарное с $\mathbf{M}$ ($d\mathbf{M} = \mathbf{N}\,dt$). Поэтому вращение все время происходит вокруг главной оси, так что соотношение $\mathbf{M} = I\boldsymbol{\omega}$ не нарушается. Однако в этом случае векторная формула (5.43) не дает ничего нового по сравнению с формулой

$$I\beta_z = N_z \tag{5.44}$$

(z — ось вращения).

При **N**, неколлинеарном с **M** (например, при **N**, перпендикулярном к **M**), ось вращения со временем перемещается относительно тела; поэтому даже при условии, что соотношение $\mathbf{M} = I\boldsymbol{\omega}$ выполняется в начальный момент, со временем это соотношение перестает выполняться, и уравнение (5.43) утрачивает смысл. Только в том случае, когда тело является шаровым волчком, перемещение оси вращения относительно тела не имеет значения. Для шарового волчка любая ось является главной и обладает одинаковым значением момента инерции I; поэтому уравнение (5.43) оказывается справедливым при любом взаимном направлении векторов **N** и $\boldsymbol{\omega}$.

5.6. Кинетическая энергия вращающегося твердого тела

Начнем с рассмотрения вращения тела вокруг неподвижной оси, которую мы назовем осью z (рис. 5.17). Линейная скорость элементарной массы m_i равна $v_i = \omega R_i$, где R_i — расстояние массы m_i от оси z. Следовательно, для кинетической энергии i-й элементарной массы получается выражение

$$T_i = \frac{m_i v_i^2}{2} = \frac{1}{2} m_i \omega^2 R_i^2.$$

Кинетическая энергия тела слагается из кинетических энергий его частей:

$$T = \sum T_i = \frac{1}{2}\omega^2 \sum m_i R_i^2.$$

Рис. 5.17

Сумма в правой части этого соотношения представляет собой момент инерции тела I относительно оси вращения. Таким образом, кинетическая энергия тела, вращающегося вокруг неподвижной оси, равна

$$T = I\omega^2/2. \qquad (5.45)$$

Пусть на массу m_i действуют[8]) внутренняя сила $\mathbf{f}_i$ и внешняя сила $\mathbf{F}_i$ (см. рис. 5.17). Согласно (3.16) эти силы

[8]) Результирующая сила $\mathbf{f}_i + \mathbf{F}_i$ лежит в плоскости, перпендикуляр-

совершат за время dt работу

$$dA_i = \mathbf{f}_i \mathbf{v}_i \, dt + \mathbf{F}_i \mathbf{v}_i \, dt = \mathbf{f}_i [\boldsymbol{\omega} \mathbf{r}_i] \, dt + \mathbf{F}_i [\boldsymbol{\omega} \mathbf{r}_i] \, dt.$$

Осуществив в смешанных произведениях векторов циклическую перестановку сомножителей (см. (1.34)), получим

$$dA_i = \boldsymbol{\omega}[\mathbf{r}_i, \mathbf{f}_i] \, dt + \boldsymbol{\omega}[\mathbf{r}_i \mathbf{F}_i] \, dt = \boldsymbol{\omega} \mathbf{N}_i^{(\text{внутр})} \, dt + \boldsymbol{\omega} \mathbf{N}_i \, dt, \tag{5.46}$$

где $\mathbf{N}_i^{(\text{внутр})}$ — момент внутренней силы относительно точки O, $\mathbf{N}_i$ — аналогичный момент внешней силы.

Просуммировав выражение (5.46) по всем элементарным массам, получим элементарную работу, совершаемую над телом за время dt:

$$dA = \sum dA_i = \boldsymbol{\omega} \left\{ \sum \mathbf{N}_i^{(\text{внутр})} \right\} dt + \boldsymbol{\omega} \left\{ \sum \mathbf{N}_i \right\} dt.$$

Сумма моментов внутренних сил равна нулю (см. (3.117)). Следовательно, обозначив суммарный момент внешних сил через $\mathbf{N}$, придем к выражению

$$dA = \boldsymbol{\omega} \mathbf{N} \, dt = \omega N_\omega \, dt \tag{5.47}$$

(мы воспользовались формулой (1.21)). Наконец, приняв во внимание, что $\omega \, dt$ есть угол $d\varphi$, на который поворачивается тело за время dt, получим выражение

$$dA = N_\omega \, d\varphi. \tag{5.48}$$

Знак работы зависит от знака N_ω, т. е. от знака проекции вектора $\mathbf{N}$ на направление вектора $\boldsymbol{\omega}$.

Итак, при вращении тела внутренние силы работы не совершают, работа же внешних сил определяется формулой (5.48).

К формуле (5.48) можно прийти, воспользовавшись тем, что работа, совершаемая всеми приложенными к телу силами, идет на приращение его кинетической энергии (см. (3.11)). Взяв дифференциал от обеих частей равенства (5.45), придем к соотношению

$$dT = d\left(\frac{I\omega^2}{2}\right) = d\left(\frac{I\omega^2}{2}\right) = I\omega \, d\omega = \\ = I\boldsymbol{\omega}\boldsymbol{\beta} \, dt = I\omega\beta_\omega \, dt = I\beta_\omega \, d\varphi.$$

Согласно уравнению (5.14) $I\beta_\omega = N_\omega$, так что, заменив dT на dA, придем к формуле (5.48).

Таблица 5.1

Поступательное движение	Вращательное движение
$\mathbf{v}$ — линейная скорость	$\boldsymbol{\omega}$ — угловая скорость
$\mathbf{w} = \dot{\mathbf{v}}$ — линейное ускорение	$\boldsymbol{\beta} = \dot{\boldsymbol{\omega}}$ — угловое ускорение
m — масса	I — момент инерции
$\mathbf{p} = m\mathbf{v}$ — импульс	$M_z = I\omega_z$ — момент импульса *)
$\mathbf{F}$ — сила	$\mathbf{N}$ или N_z — момент силы
$\dot{\mathbf{p}} = \mathbf{F}$	$\dot{\mathbf{M}} = \mathbf{N}$
$m\mathbf{w} = \mathbf{F}$	$I\beta_z = N_z$ *)
$T = mv^2/2$	$T = I\omega^2/2$ *)
$dA = F_s\,ds = F_v\,ds$	$dA = N_\omega d\varphi$

*) Для неподвижной оси вращения

В табл. 5.1 сопоставлены формулы механики вращательного движения с аналогичными формулами механики поступательного движения (механики точки). Из этого сопоставления видно, что во всех случаях роль массы играет момент инерции, роль силы — момент силы, роль импульса — момент импульса и т. д.

Формулу (5.45) мы получили для случая, когда тело вращается вокруг неподвижной фиксированной в теле оси. Теперь допустим, что тело вращается произвольным образом относительно неподвижной точки, совпадающей с его центром масс. Свяжем жестко с телом декартову систему координат, начало которой поместим в центр масс тела. Скорость i-й элементарной массы равна $\mathbf{v}_i = [\boldsymbol{\omega}\mathbf{r}_i]$. Следовательно, для кинетической энергии тела можно написать выражение

$$T = \frac{1}{2}\sum m_i v_i^2 = \frac{1}{2}\sum m_i [\boldsymbol{\omega}\mathbf{r}_i]^2 = \frac{1}{2}\sum m_i \omega^2 r_i^2 \sin^2\alpha_i,$$

где α_i — угол между векторами $\boldsymbol{\omega}$ и $\mathbf{r}_i$. Заменив $\sin^2\alpha_i$ через $1 - \cos^2\alpha_i$ и учтя, что $\omega r_i \cos\alpha_i = \boldsymbol{\omega}\mathbf{r}_i$, получим

$$T = \frac{1}{2}\sum m_i\{\omega^2 \mathbf{r}_i^2 - (\boldsymbol{\omega}\mathbf{r}_i)^2\}.$$

Распишем скалярные произведения через проекции векторов ω и $\mathbf{r}_i$ на оси связанной с телом координатной системы:

$$T = \frac{1}{2}\sum m_i\{(\omega_x^2+\omega_y^2+\omega_z^2)(x_i^2+y_i^2+z_i^2)-$$
$$-(\omega_x x_i+\omega_y y_i+\omega_z z_i)(\omega_x x_i+\omega_y y_i+\omega_z z_i)\} =$$
$$= \frac{1}{2}\sum m_i\{(\omega_x^2+\omega_y^2+\omega_z^2)(x_i^2+y_i^2+z_i^2) -$$
$$-\omega_x^2 x_i^2 - \omega_x\omega_y x_i y_i - \omega_x\omega_z x_i z_i - \omega_y\omega_x y_i x_i -$$
$$-\omega_y^2 y_i^2 - \omega_y\omega_z y_i z_i - \omega_z\omega_x z_i x_i - \omega_z\omega_y z_i y_i - \omega_z^2 z_i^2\}.$$

Наконец, объединив слагаемые с одинаковыми произведениями компонент угловой скорости и вынеся эти произведения за знаки сумм, получим

$$T = \frac{1}{2}\left\{\omega_x^2\sum m_i(y_i^2+z_i^2)+\omega_y^2\sum m_i(x_i^2+z_i^2)+\right.$$
$$+\omega_z^2\sum m_i(x_i^2+y_i^2)-\omega_x\omega_y\sum m_i x_i y_i -$$
$$-\omega_x\omega_z\sum m_i x_i z_i - \omega_y\omega_x\sum m_i y_i x_i -$$
$$\left.-\omega_y\omega_z\sum m_i y_i z_i - \omega_z\omega_x\sum m_i z_i x_i - \omega_z\omega_y\sum m_i z_i y_i\right\}.$$

Суммы, на которые умножаются произведения компонент угловой скорости, суть компоненты тензора инерции (см. (5.39)). Следовательно, мы пришли к формуле

$$T = \frac{1}{2}\{I_{xx}\omega_x^2 + I_{xy}\omega_x\omega_y + I_{xz}\omega_x\omega_z + I_{yx}\omega_y\omega_x +$$
$$+I_{yy}\omega_y^2 + I_{yz}\omega_y\omega_z + I_{zx}\omega_z\omega_x + I_{zy}\omega_z\omega_y + I_{zz}\omega_z^2\}. \quad (5.49)$$

Эту формулу можно написать в виде

$$T = \frac{1}{2}\sum_{i,\,k=x,y,z} I_{ik}\omega_i\omega_k. \quad (5.50)$$

При суммировании индексы i и k пробегают, независимо друг от друга, значения x, y, z.

Если оси связанной с телом системы координат выбрать так, чтобы они совпали с главными осями инерции тела, центробежные моменты инерции обратятся в нуль и выражение (5.49) упростится до вида

$$T = \frac{1}{2}\{I_x\omega_x^2 + I_y\omega_y^2 + I_z\omega_z^2\}. \tag{5.51}$$

Здесь I_x, I_y, I_z — главные моменты инерции тела Для шарового волчка эти моменты имеют одинаковые значения I, так что формула (5.51) принимает вид $T = I\omega^2/2$ (ср. с (5.45)). При вращении произвольного тела вокруг одной из главных осей инерции, скажем оси z, имеем $\omega_z = \omega$, $\omega_x = \omega_y = 0$ и формула (5.51) переходит в (5.45).

Таким образом, кинетическая энергия вращающегося тела равна половине произведения момента инерции на квадрат угловой скорости в трех случаях: 1) для тела, вращающегося вокруг неподвижной оси; 2) для тела, вращающегося вокруг одной из главных осей инерции; 3) для шарового волчка. В остальных случаях кинетическая энергия определяется более сложными формулами (5.49) или (5.51).

5.7. Кинетическая энергия тела при плоском движении

Плоское движение тела может быть представлено как наложение двух движений — поступательного с некоторой скоростью $\mathbf{v}_0$ и вращения вокруг соответствующей оси с угловой скоростью $\boldsymbol{\omega}$ (см. § 5.1). Согласно формуле (5.1) скорость i-й элементарной массы тела равна

$$\mathbf{v}_i = \mathbf{v}_0 + [\boldsymbol{\omega}\mathbf{r}_i],$$

где $\mathbf{v}_0$ — скорость некоторой точки O тела, $\mathbf{r}_i$ — радиус-вектор, определяющий положение элементарной массы по отношению к точке O.

Кинетическая энергия i-й элементарной массы равна

$$T_i = \frac{1}{2}m_i v_i^2 = \frac{1}{2}m_i\{\mathbf{v}_0 + [\boldsymbol{\omega}\mathbf{r}_i]\}^2.$$

Осуществив возведение в квадрат, получим выражение

$$T_i = \frac{1}{2}m_i\{v_0^2 + 2\mathbf{v}_0[\boldsymbol{\omega}\mathbf{r}_i] + [\boldsymbol{\omega}\mathbf{r}_i]^2\}.$$

Векторное произведение $\boldsymbol{\omega}$ на $\mathbf{r}_i$ имеет модуль, равный ωR_i, где R_i — расстояние массы m_i от оси вращения (см. рис. 1.33 и текст, предшествующий формуле (1.100)). Следовательно, третье слагаемое в фигурных скобках равно $\omega^2 R_i^2$. Во втором слагаемом осуществим циклическую перестановку сомножителей (см. (1.34)). В результате придем к выражению

$$T_i = \frac{1}{2}m_i\{v_0^2 + 2[\mathbf{v}_0\boldsymbol{\omega}]\mathbf{r}_i + \omega^2 R_i^2\}. \qquad (5.52)$$

Чтобы получить кинетическую энергию тела, просуммируем выражение (5.52) по всем элементарным массам, причем вынесем постоянные множители за знаки сумм:

$$T = \frac{1}{2}v_0^2\sum m_i + [\mathbf{v}_0\boldsymbol{\omega}]\sum m_i\mathbf{r}_i + \frac{1}{2}\omega^2\sum m_i R_i^2.$$

Сумма элементарных масс $\sum m_i$ есть масса тела m. Выражение $\sum m_i\mathbf{r}_i$ равно произведению массы тела на радиус-вектор $\mathbf{r}_C$ центра масс тела. Наконец, $\sum m_i R_i^2$ есть момент инерции тела I_0 относительно оси, проходящей через точку O. Поэтому можно написать, что

$$T = \frac{1}{2}mv_0^2 + m\mathbf{r}_C[\mathbf{v}_0\boldsymbol{\omega}] + \frac{1}{2}I_0\omega^2. \qquad (5.53)$$

Если в качестве точки O взять центр масс тела C, радиус-вектор $\mathbf{r}_C$ будет равен нулю, так что второе слагаемое исчезает. Следовательно, обозначив через $\mathbf{v}_C$ скорость центра масс, а через I_C — момент инерции тела относительно оси вращения, проходящей через точку C, получим для кинетической энергии тела формулу

$$T = \frac{mv_C^2}{2} + \frac{I_C\omega^2}{2}. \qquad (5.54)$$

Таким образом, кинетическая энергия тела при плоском движении слагается из энергии поступательного движения со скоростью, равной скорости центра масс, и энергии вращения вокруг оси, проходящей через центр масс тела.

5.8. Применение законов динамики твердого тела

Движение твердого тела описывается двумя уравнениями:

$$m\mathbf{w}_C = \sum \mathbf{F}_{\text{внешн}} \tag{5.55}$$

$$\mathbf{M} = \sum \mathbf{N}_{\text{внешн}} \tag{5.56}$$

(см. формулы (5.6) и (5.7)). Следовательно, движение тела определяется действующими на него внешними силами и моментами этих сил.

Моменты сил можно брать относительно любой неподвижной или движущейся без ускорения точки. Взяв момент внешних сил относительно точки, движущейся с ускорением, мы, по существу, написали бы уравнение (5.56) в неинерциальной системе отсчета. В этом случае, кроме внешних сил, обусловленных взаимодействием данного тела с другими телами, нужно учитывать силы инерции и их моменты.

Точки приложения сил, действующих на тело, можно переносить вдоль линий действия сил, поскольку при этом ни сумма сил, ни их моменты не изменяются (при перенесении силы вдоль линии ее действия плечо относительно любой точки остается неизменным). Это позволяет заменять несколько сил одной силой, эквивалентной им в отношении воздействия, оказываемого на тело Так, например, две силы $\mathbf{F}_1$ и $\mathbf{F}_2$, лежащие в одной плоскости (рис. 5.18), можно заменить эквивалентной им силой $\mathbf{F}$, точку приложения которой можно также выбрать произвольно на направлении, вдоль которого она действует.

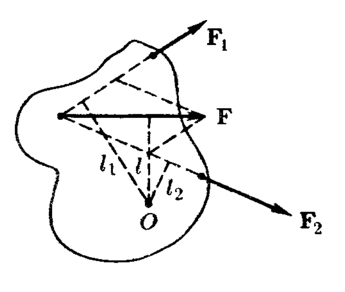


Рис. 5.18

Совокупность действующих на тело параллельных сил можно заменить их равнодействующей, равной сумме всех сил и приложенной к такой точке тела, чтобы ее момент был равен сумме моментов отдельных сил.

Найдем равнодействующую сил тяжести. Эти силы приложены ко всем элементам тела, причем на элементарную массу m_i действует сила $m_i\mathbf{g}$. Сумма сил равна

$\mathbf{P} = m\mathbf{g}$, где $m = \sum m_i$ — масса тела. Суммарный момент сил тяжести относительно некоторой точки O равен

$$\mathbf{N} = \sum [\mathbf{r}_i(m_i\mathbf{g})],$$

где $\mathbf{r}_i$ — радиус-вектор, определяющий положение массы m_i по отношению к точке O. Перенеся скалярный множитель m_i из второго сомножителя в первый и вынеся затем общий множитель $\mathbf{g}$ за знак суммы, получим

$$\mathbf{N} = \left[\left(\sum m_i\mathbf{r}_i\right)\mathbf{g}\right].$$

Сумма, стоящая в круглых скобках, равна произведению массы тела на радиус-вектор $\mathbf{r}_C$ центра масс C. Поэтому

$$\mathbf{N} = [(m\mathbf{r}_C)\,\mathbf{g}] = [\mathbf{r}_C(m\mathbf{g})] = [\mathbf{r}_C\mathbf{P}]. \qquad (5.57)$$

Таким образом, суммарный момент сил тяжести относительно произвольной точки O совпадает с моментом силы $m\mathbf{g}$, приложенной к точке C. Итак, равнодействующая сил тяжести равна $\mathbf{P} = m\mathbf{g}$ и приложена к центру масс тела. Отметим, что это справедливо лишь в том случае, если в пределах тела поле сил тяжести однородно (при выводе формулы (5.57) мы считали, что $\mathbf{g} = \text{const}$).

Из (5.57) вытекает, что момент сил тяжести относительно центра масс равен нулю (в этом случае $\mathbf{r}_C = 0$). Точка, относительно которой момент сил тяжести равен нулю, называется *центром тяжести* тела. Таким образом, в случае, когда поле тяготения в пределах тела однородно, центр тяжести совпадает с центром масс.

В случае однородного поля тяготения силы тяжести, приложенные к различным элементарным массам, имеют одинаковое направление и пропорциональны m_i. Таким же свойством обладают силы инерции, возникающие в неинерциальной системе отсчета, движущейся поступательно относительно инерциальных систем. Действительно, в этом случае силы инерции, приложенные к элементарным массам m_i, равны $-m_i\mathbf{a}$, где $\mathbf{a}$ — ускорение неинерциальной системы (см. (4.2)). Повторив рассуждения, приведшие нас к формуле (5.57) (при этом $m_i\mathbf{g}$ нужно заменить на $-m_i\mathbf{a}$), можно показать, что результирующая сил инерции равна $-m\mathbf{a}$ и приложена к центру масс тела. Подчеркнем, что это справедливо лишь для систем отсчета, движущихся поступательно.

Относительно центра масс момент сил инерции (в поступательно движущейся системе) равен нулю. Поэтому при составлении уравнения (5.56) для моментов, взятых относительно центра масс, силы инерции учитывать не нужно.

Выясним условия равновесия твердого тела. Тело может оставаться в состоянии покоя в том случае, если нет причин, приводящих к возникновению поступательного движения или вращения. Согласно уравнениям (5.55) и (5.56) для этого необходимо и достаточно выполнения двух условий:

1) сумма всех внешних сил, приложенных к телу, должна быть равна нулю:

$$\sum \mathbf{F}_{\text{внешн}} = 0; \qquad (5.58)$$

2) результирующий момент внешних сил относительно любой точки должен быть равен нулю:

$$\sum \mathbf{N}_{\text{внешн}} = 0. \qquad (5.59)$$

При выполнении условия (5.58) из равенства нулю суммы моментов для одной какой-либо точки O вытекает равенство нулю суммы моментов относительно любой другой точки O'. Действительно, пусть для некоторой точки O

$$\sum \mathbf{N}_i = \sum [\mathbf{r}_i \mathbf{F}_i] = 0. \qquad (5.60)$$

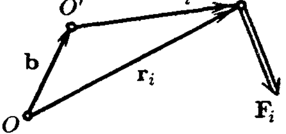


Рис. 5.19

Возьмем другую точку O', положение которой относительно O определяется вектором $\mathbf{b}$. Из рис. 5.19 видно, что $\mathbf{r}'_i = \mathbf{r}_i - \mathbf{b}$. Следовательно, сумма моментов относительно точки O' равна

$$\sum \mathbf{N}'_i = \sum [\mathbf{r}'_i \mathbf{F}_i] = \sum [(\mathbf{r}_i - \mathbf{b}) \mathbf{F}_i] = \sum [\mathbf{r}_i \mathbf{F}_i] - \sum [\mathbf{b} \mathbf{F}_i].$$

Согласно (5.60) первая сумма равна нулю. Вынеся во второй сумме постоянный множитель $\mathbf{b}$ за скобки, получим выражение $-[\mathbf{b}, \sum \mathbf{F}_i]$, которое в силу (5.58) также равно нулю. Таким образом, из (5.58) и условия (5.60) для точки O вытекает условие (5.60) для точки O'.

Отметим, что векторное условие (5.59) эквивалентно трем скалярным условиям:

$$\sum \mathbf{N}_{x\,\text{внешн}} = 0, \quad \sum \mathbf{N}_{y\,\text{внешн}} = 0, \quad \sum \mathbf{N}_{z\,\text{внешн}} = 0. \tag{5.61}$$

Итак, условия равновесия твердого тела определяются уравнениями (5.58) и (5.59) или уравнениями (5.58) и (5.61).

В заключение рассмотрим пример на применение законов динамики твердого тела. Пусть однородный цилиндр радиуса R и массы m скатывается без скольжения с наклонной плоскости (рис. 5.20). Угол наклона плоскости равен α, а высота h ($h \gg R$). Начальная скорость цилиндра равна нулю. Требуется найти скорость центра масс и угловую скорость вращения цилиндра в момент выхода цилиндра на горизонтальный участок. Дадим два варианта решения.

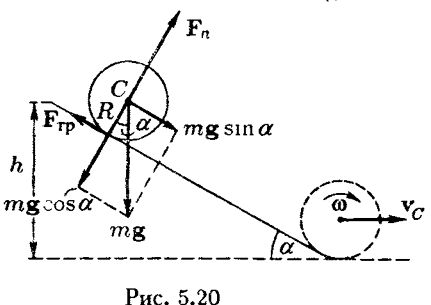


Рис. 5.20

Первый способ решения. Цилиндр будет двигаться под действием трех сил: силы $\mathbf{P} = m\mathbf{g}$, силы трения $\mathbf{F}_{тр}$ и силы нормального давления $\mathbf{F}_n$ (см. § 2.12). Ускорение цилиндра в направлении нормали к плоскости равно нулю. Следовательно, сила нормального давления равна по модулю нормальной составляющей силы $\mathbf{P}$, имеющей значение $mg\cos\alpha$.

Трение между цилиндром и плоскостью возникает в точках их соприкосновения. При отсутствии скольжения эти точки цилиндра неподвижны (они образуют мгновенную ось вращения); следовательно, сила трения, о которой идет речь, является силой трения покоя. Из § 2.10 известно, что сила трения покоя может принимать значения в пределах от нуля до максимального значения F_0, которое определяется произведением коэффициента трения на силу нормального давления, прижимающую друг к другу соприкасающиеся тела ($F_0 = kmg\cos\alpha$). В рассматриваемом случае сила трения принимает значение, предотвращающее скольжение. Скольжение при качении цилиндра

по плоскости будет отсутствовать при условии, что линейная скорость точек соприкосновения будет равна нулю, что в свою очередь выполняется, если скорость центра инерции v_C равна в каждый момент времени угловой скорости вращения цилиндра ω, умноженной на радиус цилиндра R:

$$v_C = \omega R. \tag{5.62}$$

Соответственно ускорение центра масс w_C будет равно угловому ускорению β, умноженному на R:

$$w_C = \beta R. \tag{5.63}$$

Если необходимая для выполнения условий (5.62) и (5.63) сила трения не превышает максимального значения F_0, цилиндр будет скатываться без скольжения. В противном случае скатывание без скольжения невозможно.

Уравнение (5.55) в данном случае имеет вид

$$m\mathbf{w}_C = m\mathbf{g} + \mathbf{F}_{\text{тр}} + \mathbf{F}_n.$$

Спроецировав его на направление движения, получим

$$mw_C = mg\sin\alpha - F_{\text{тр}}. \tag{5.64}$$

Для однородного цилиндра, вращающегося вокруг оси симметрии, $\mathbf{M} = I\boldsymbol{\omega}$. Поэтому уравнение (5.56) можно писать в виде

$$I\beta = \sum N_z, \tag{5.65}$$

где z — ось цилиндра (см. (5.14)). В уравнении (5.65), написанном относительно оси цилиндра, отличным от нуля будет только момент силы трения. Остальные силы, в том числе и результирующая сил инерции, имеют направления, проходящие через ось цилиндра, вследствие чего их моменты относительно этой оси равны нулю. Таким образом, уравнение (5.65) запишется следующим образом:

$$I\beta = RF_{\text{тр}}. \tag{5.66}$$

Здесь I — момент инерции цилиндра относительно его оси, равный $mR^2/2$.

В уравнениях (5.64) и (5.66) содержатся три неизвестные величины: $F_{\text{тр}}$, w_C и β. Последние две величины связаны условием (5.63), вытекающим из отсутствия скольжения. Решив совместно уравнения (5.63), (5.64) и (5.66),

найдем (с учетом того, что $I = mR^2/2$) значения искомых величин:

$$F_{\text{тр}} = \frac{1}{3} mg \sin\alpha, \tag{5.67}$$

$$w_C = \frac{2}{3} g \sin\alpha, \tag{5.68}$$

$$\beta = \frac{2g}{3R} \sin\alpha. \tag{5.69}$$

Теперь, когда мы знаем силу трения покоя, необходимую для скатывания цилиндра без скольжения, можно найти условие, при котором такое скатывание возможно. Для скатывания без скольжения сила (5.67) не должна превышать максимального значения силы трения покоя F_0, равного $kmg\cos\alpha$:

$$\frac{1}{3} mg \sin\alpha \leq kmg \cos\alpha.$$

Отсюда

$$\operatorname{tg}\alpha \leq 3k.$$

Следовательно, если тангенс угла наклона плоскости превышает утроенное значение коэффициента трения покоя между цилиндром и плоскостью, скатывание не может происходить без скольжения.

Из постоянства w_C (см. (5.68)) следует, что центр масс цилиндра движется равноускоренно. За время скатывания $t_{\text{ск}}$ цилиндр проходит путь $h/\sin\alpha$. При равноускоренном движении путь, ускорение и время связаны соотношением $s = wt^2/2$. Подставив значение s, получим, что

$$\frac{h}{\sin\alpha} = \frac{1}{2} w_C t_{\text{ск}}^2,$$

откуда с учетом значения (5.68) для w_C приходим к формуле

$$t_{\text{ск}} = \frac{1}{\sin\alpha}\sqrt{\frac{3h}{g}}.$$

Это время, как и w_C, не зависит от массы и радиуса цилиндра[9]); оно определяется только углом наклона плоскости α и разностью уровней ее краев h.

[9]) Это справедливо только для однородного сплошного цилиндра.

Скорость центра масс при выходе цилиндра на горизонтальный участок будет равна

$$v_C = w_C t_{\text{ск}} = \sqrt{\frac{4}{3}gh},$$

а угловая скорость цилиндра

$$\omega = \beta t_{\text{ск}} = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{4}{3}gh}.$$

Отметим, что сила трения покоя работы над цилиндром не совершает, так как точки цилиндра, к которым приложена эта сила, в каждый момент времени неподвижны (см. (3.16)).

Для горизонтальной плоскости ($\alpha = 0$) по формулам (5.68) и (5.69) получается, что цилиндр, если ему сообщить предварительно некоторую поступательную и соответствующую (такую, чтобы не было скольжения) угловую скорость, будет двигаться без ускорения. На самом деле движение будет замедленным. Это замедление обусловливается силой трения качения, которая направлена так, что ее момент уменьшает угловую скорость ω, а сама сила вызывает соответствующее (опять-таки такое, чтобы не возникало скольжения) замедление центра масс. Сила трения качения совершает над катящимся телом отрицательную работу.

При решении задачи о скатывании цилиндра с наклонной плоскости трением качения мы пренебрегали.

Второй способ решения. Поскольку сила трения работы не совершает (трением качения пренебрегаем), полная энергия цилиндра остается постоянной. В начальный момент кинетическая энергия равна нулю, потенциальная энергия равна mgh. В конце скатывания потенциальная энергия становится равной нулю, зато появляется кинетическая энергия, равная (см. (5.54))

$$T = \frac{mv_C^2}{2} + \frac{I_C\omega^2}{2}.$$

Так как скольжение отсутствует, v_C и ω связаны соотношением $v_C = \omega R$. Подставив в выражение для кинетической энергии $\omega = v_C/R$ и $I_C = mR^2/2$, получим

$$T = \frac{mv_C^2}{2} + \frac{mv_C^2}{4} = \frac{3}{4}mv_C^2.$$

Полная энергия в начале и в конце скатывания должна быть одинакова:

$$\frac{3}{4}mv_C^2 = mgh,$$

откуда

$$v_C = \sqrt{\frac{4}{3}gh},$$

а угловая скорость

$$\omega = \frac{v_C}{R} = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{4}{3}gh}.$$

Обратите внимание, насколько второй способ решения проще первого.

5.9. Гироскопы

Гироскопом (или волчком) называется массивное симметричное тело, вращающееся с большой скоростью вокруг оси симметрии. Эту ось мы будем называть осью гироскопа. Ось гироскопа является одной из главных осей инерции. Поэтому, если она не поворачивается в пространстве, момент импульса равен $\mathbf{M} = I\omega$, где I — момент инерции относительно оси гироскопа. Допустим теперь, что ось гироскопа поворачивается с некоторой скоростью ω'. В этом случае результирующее вращение гироскопа происходит вокруг оси, не совпадающей с осью симметрии, и направление вектора $\mathbf{M}$ не совпадает с направлением оси гироскопа. Однако если скорость вращения оси ω' пренебрежимо мала по сравнению со скоростью собственного вращения гироскопа ω ($\omega' \ll \omega$), то можно приближенно считать вектор $\mathbf{M}$ равным $I\omega$ и направленным вдоль оси гироскопа. При этом условии поворот вектора $\mathbf{M}$ и поворот оси гироскопа будут эквивалентными. В дальнейшем мы будем предполагать, что условие $\omega' \ll \omega$ соблюдается.

При попытке вызвать поворот оси гироскопа наблюдается своеобразное явление, получившее название гироскопического эффекта: под действием сил, которые, казалось бы, должны были вызвать поворот оси гироскопа OO вокруг прямой $O'O'$ (рис. 5.21), ось гироскопа поворачивается вокруг прямой $O''O''$ (ось OO и прямая

$O'O'$ предполагаются лежащими в плоскости рисунка, а прямая $O''O''$ и силы $\mathbf{F}_1$ и $\mathbf{F}_2$ — перпендикулярными к этой плоскости). Противоестественное на первый взгляд поведение гироскопа оказывается полностью соответствующим законам динамики вращательного движения. В самом деле, момент сил $\mathbf{F}_1$ и $\mathbf{F}_2$ направлен вдоль прямой $O'O'$. За время dt момент импульса гироскопа $\mathbf{M}$ получит приращение $d\mathbf{M} = \mathbf{N}\,dt$, которое имеет такое же направление, как и $\mathbf{N}$. Спустя время dt момент импульса гироскопа будет равен результирующей $\mathbf{M}' = \mathbf{M}+d\mathbf{M}$, лежащей в плоскости рисунка. Направление вектора $\mathbf{M}'$ совпадает с новым направлением оси гироскопа.

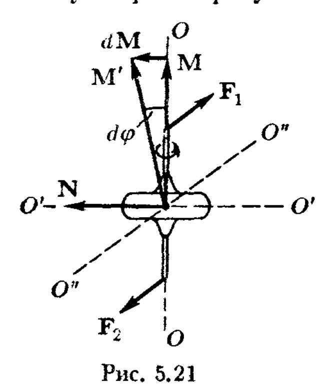


Рис. 5.21

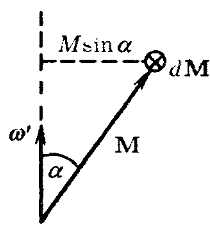


Рис. 5.22

Таким образом, ось гироскопа повернется вокруг прямой $O''O''$ на некоторый угол $d\varphi$. Из рис. 5.21 видно, что $d\varphi = |d\mathbf{M}|/M = N\,dt/M$. Отсюда следует, что поворот оси гироскопа в новое положение произошел с угловой скоростью $\omega' = d\varphi/dt = N/M$. Перепишем это соотношение в виде $N = \omega' M$. Векторы $\mathbf{N}$, $\mathbf{M}$ и $\boldsymbol{\omega}'$ взаимно перпендикулярны (вектор $\boldsymbol{\omega}'$ направлен вдоль прямой $O''O''$ «на нас»). Поэтому связь между ними можно записать в виде

$$\mathbf{N} = [\boldsymbol{\omega}'\mathbf{M}]. \tag{5.70}$$

Мы получили эту формулу для случая, когда векторы $\boldsymbol{\omega}'$ и $\mathbf{M}$ взаимно перпендикулярны. Однако она справедлива и в самом общем случае. Как видно из рис. 5.22, при повороте оси гироскопа вокруг вектора $\boldsymbol{\omega}'$ на угол $d\varphi$ вектор $\mathbf{M}$ получает приращение, модуль которого равен $|d\mathbf{M}| = M \sin\alpha\, d\varphi$. Вместе с тем $|d\mathbf{M}| = N\,dt$. Таким образом, $M\sin\alpha\, d\varphi = N\,dt$, откуда $N = \omega' M \sin\alpha$. С помощью рис. 5.22 легко сообразить, что и в этом случае

справедлива формула (5.70) (векторы ω' и $\mathbf{M}$ лежат в плоскости рисунка, вектор $d\mathbf{M}$ направлен «от нас» и поэтому изображен кружком с крестиком). Напомним, что формула (5.70) справедлива лишь в том случае, если $\omega' \ll \omega$.

При попытках вызвать поворот оси гироскопа заданным образом вследствие гироскопического эффекта возникают так называемые гироскопические силы, действующие на подшипники, в которых вращается ось гироскопа. Например, при принудительном повороте оси гироскопа OO вокруг прямой $O'O'$ (рис. 5.23) ось гироскопа стремится повернуться вокруг прямой $O''O''$. Чтобы пре-

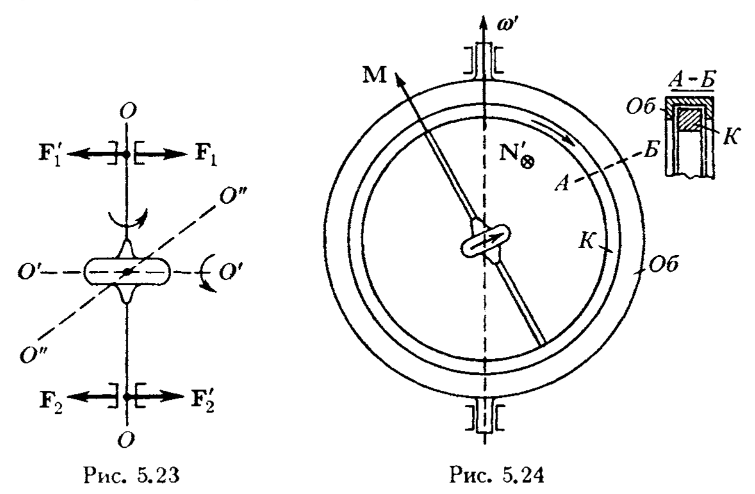


Рис. 5.23 Рис. 5.24

дотвратить это вращение, к оси гироскопа должны быть приложены действующие со стороны подшипников силы $\mathbf{F}'_1$ и $\mathbf{F}'_2$. По третьему закону Ньютона ось гироскопа будет действовать на подшипники с силами $\mathbf{F}_1$ и $\mathbf{F}_2$, которые и являются гироскопическими силами. При принудительном повороте оси гироскопа с угловой скоростью ω' момент сил, с которыми подшипники действуют на ось, определяется формулой (5.70). Момент гироскопических сил, с которыми ось действует на подшипники, равен

$$\mathbf{N}' = [\mathbf{M}\omega']. \tag{5.71}$$

Предположим, что ось гироскопа закреплена в кольце K, которое может свободно поворачиваться в обойме *Об* (рис. 5.24). Приведем обойму во вращение вокруг оси, ле-

жащей в ее плоскости, с угловой скоростью ω'. В этом случае, как мы выяснили, возникает действующий на кольцо момент гироскопических сил, определяемый формулой (5.71). Под действием этого момента кольцо будет поворачиваться в обойме в направлении, указанном стрелкой, до тех пор, пока ось гироскопа не установится в направлении оси вращения обоймы и момент (5.71) не станет равным нулю. При этом направление собственного вращения гироскопа и направление, в котором вращается обойма, совпадут. При $\mathbf{M}$ и ω', направленных в противоположные стороны, момент (5.71) также равен нулю. Однако соответствующее положение оси гироскопа будет неустойчивым — при малейшем отклонении угла между $\mathbf{M}$ и ω' от 180° появится момент $\mathbf{N}'$, который будет поворачивать ось до тех пор, пока этот угол не станет равным нулю.

Теперь допустим, что обойма поворачивается с угловой скоростью ω' вокруг оси, не лежащей в ее плоскости (рис. 5.25). В положении кольца, при котором момент импульса гироскопа $\mathbf{M}$ перпендикулярен к ω' (рис. 5.25 *а*), вектор $\mathbf{N}'$ имеет направление, показанное на рисунке. Сос-

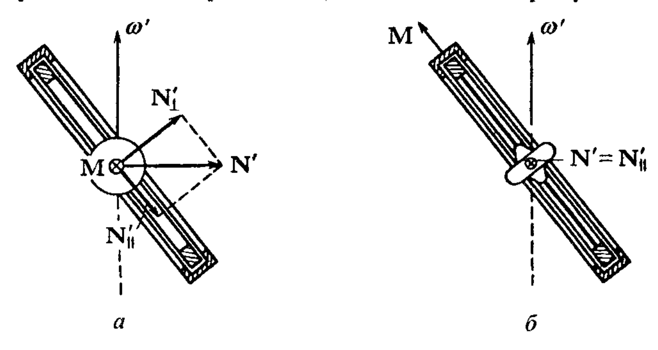


Рис. 5.25

тавляющая $\mathbf{N}'_{\perp}$ этого вектора вызывает поворот кольца в обойме, в результате которого угол между векторами $\mathbf{M}$ и ω' будет уменьшаться. Составляющая $\mathbf{N}'_{\parallel}$ стремится перекосить кольцо относительно обоймы. Когда кольцо займет такое положение, при котором угол между векторами $\mathbf{M}$ и ω' примет наименьшее возможное значение (рис. 5.25 *б*), составляющая $\mathbf{N}'_{\perp}$ станет равной нулю, так как в этом случае момент гироскопических сил $\mathbf{N}'$ лежит в плоскости

кольца; этот момент не может вызвать вращения кольца в обойме. Таким образом, под действием гироскопических сил кольцо занимает в обойме такое положение, при котором угол между осью гироскопа и осью вращения обоймы минимален.

Описанное поведение гироскопа положено в основу прибора, называемого гироскопическим компасом (гирокомпасом). Этот прибор представляет собой гироскоп, ось которого может свободно поворачиваться в горизонтальной плоскости. Под влиянием суточного вращения Земли ось гирокомпаса устанавливается в такое положение, при котором угол между этой осью и осью вращения Земли будет минимальным (рис. 5.26). В этом положении ось гирокомпаса оказывается в меридиональной плоскости и, следовательно, указывает точно на север. Гироскопический компас выгодно отличается от компаса с магнитной стрелкой тем, что в его показания нет необходимости вносить поправки на так называемое магнитное склонение[10]), а также не приходится принимать мер для компенсации воздействия на стрелку расположенных вблизи нее ферромагнитных предметов (например, стального корпуса корабля и т. п.).

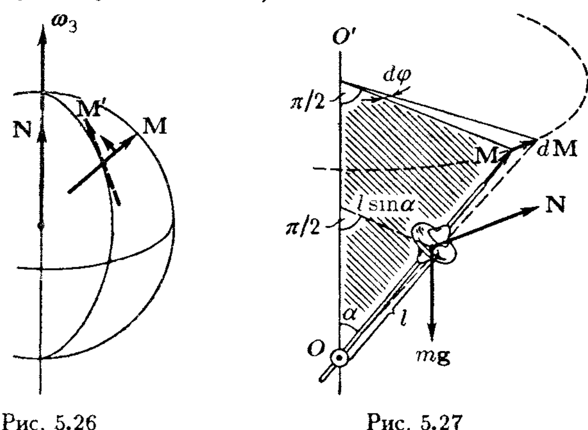


Рис. 5.26 Рис. 5.27

Допустим, что ось гироскопа может свободно поворачиваться вокруг некоторой точки O (рис. 5.27). Рассмотрим поведение такого гироскопа в поле сил тяжести. Момент

[10]) Магнитным склонением называется угол между магнитным и географическим меридианами.

сил, приложенных к гироскопу, равен по модулю

$$N = mgl \sin\alpha, \qquad (5.72)$$

где m — масса гироскопа, l — расстояние от точки O до центра масс гироскопа, α — угол, образованный осью гироскопа с вертикалью. Направлен вектор $\mathbf{N}$ перпендикулярно к вертикальной плоскости, проходящей через ось гироскопа (на рис. 5.27 эта плоскость заштрихована).

Под действием момента сил $\mathbf{N}$ момент импульса $\mathbf{M}$ получит за время dt приращение $d\mathbf{M} = \mathbf{N}\,dt$, перпендикулярное к вектору $\mathbf{M}$. Изменение, которое претерпевает вектор $\mathbf{M}$, получив приращение $d\mathbf{M}$, соответствует такому повороту оси гироскопа, при котором угол α не изменяется. Вертикальная плоскость, проходящая через ось гироскопа, повернется при этом на угол $d\varphi$. На такой же угол повернется в горизонтальной плоскости вектор $\mathbf{N}$. В результате спустя время dt будет иметь место такое же взаимное расположение векторов $\mathbf{M}$ и $\mathbf{N}$, как и в начальный момент.

За последующий элемент времени dt вектор $\mathbf{M}$ получит снова приращение $d\mathbf{M}$, которое будет перпендикулярно к новому (возникшему после предшествующего элементарного поворота) направлению вектора $\mathbf{M}$, и т. д. В итоге ось гироскопа будет поворачиваться вокруг вертикальной оси, проходящей через точку O, с угловой скоростью ω', описывая конус с углом раствора, равным 2α (ср. с рис. 5.22). (При $\alpha = \pi/2$ конус вырождается в плоскость.) Вектор $\mathbf{M}$ при этом будет изменяться только по направлению; по модулю он будет постоянным, так как элементарные приращения $d\mathbf{M}$ все время будут перпендикулярны к вектору $\mathbf{M}$[11]).

Итак, в поле сил тяжести ось гироскопа с неподвижной точкой поворачивается вокруг вертикали, описывая конус. Такое движение гироскопа называется **прецессией**. Угловую скорость прецессии ω' можно найти, приняв во внимание, что согласно (5.70) $N = \omega' M \sin\alpha$. Приравняв это значение выражению (5.72), получим, что

$$\omega' M \sin\alpha = mgl \sin\alpha,$$

[11]) Аналогично ведет себя вектор скорости при равномерном движении точки по окружности. Вектор $\mathbf{v}$ получает за время dt приращения $d\mathbf{v} = \mathbf{w}_n\,dt$ ($w_n = \text{const}$). В результате изменяется направление вектора $\mathbf{v}$, модуль же его остается постоянным.

откуда

$$\omega' = mgl/M = mgl/I\omega. \tag{5.73}$$

Из (5.73) следует, что скорость прецессии не зависит от угла наклона оси гироскопа по отношению к вертикали (от угла α).

Формулу (5.73) можно получить также следующим образом. Согласно рис. 5.27 угол $d\varphi$, на который повернется плоскость, проходящая через ось конуса и ось гироскопа, может быть представлен как отношение $|d\mathbf{M}|$ к $M \sin\alpha$ (начало вектора $\mathbf{M}$ предполагается помещенным в точку O):

$$d\varphi = \frac{|d\mathbf{M}|}{M\sin\alpha} = \frac{N\,dt}{M\sin\alpha} = \frac{mgl\sin\alpha \cdot dt}{M\sin\alpha}. \tag{5.74}$$

Очевидно, что $\omega' = d\varphi/dt$. Разделив выражение (5.74) на dt, придем к формуле (5.73).

Мы рассмотрели приближенную теорию гироскопа. Согласно строгой теории наряду с вращением оси вокруг вертикали происходят колебания оси в вертикальной плоскости, сопровождающиеся изменениями угла α в пределах от α_1 до α_2. Эти колебания оси называются н у т а ц и е й. В зависимости от начальных условий конец оси гироскопа вычерчивает на воображаемой сферической поверхности одну из изображенных на рис. 5.28 кривых. Если, например, закрепив ось под углом α_1, привести гироскоп во вращение и затем освободить ось без толчка, ось сначала

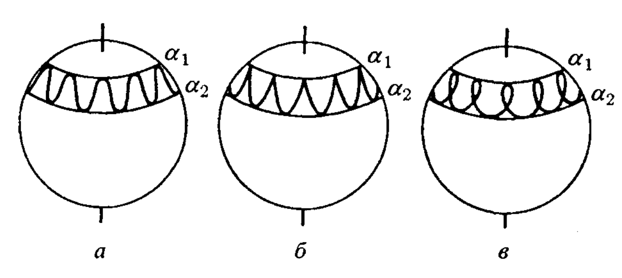


Рис. 5.28

будет, поворачиваясь вокруг вертикали, опускаться. Достигнув угла α_2, ось станет подниматься, и т. д. (этот случай изображен на рис. 5.28 *б*).

Сообщив волчку начальный толчок вполне определенной величины и направления, можно добиться того, что ось гироскопа будет прецессировать без нутации. Такая прецессия называется регулярной. Чем быстрее вращается волчок, тем меньше амплитуда нутации. Кроме того, нутация погашается трением в опоре. Поэтому практически нутация часто бывает незаметной. Прецессия, которая является регулярной лишь приближенно, называется псевдорегулярной.

Если точку O поместить в центр масс гироскопа (см. рис. 5.27, момент силы тяжести станет равным нулю, и мы получим так называемый свободный симметричный волчок. В силу закона сохранения момент импульса такого волчка не будет изменяться ни по модулю, ни по направлению. Если привести волчок во вращение вокруг оси симметрии, векторы $\mathbf{M}$ и $\boldsymbol{\omega}$ будут иметь одинаковое направление, сохраняющееся неограниченно долго. Однако если волчок будет приведен во вращение вокруг оси, не совпадающей ни с одной из его главных осей инерции, векторы $\mathbf{M}$ и $\boldsymbol{\omega}$ не будут совпадать (рис. 5.29). Соответствующий расчет приводит к следующим результатам.

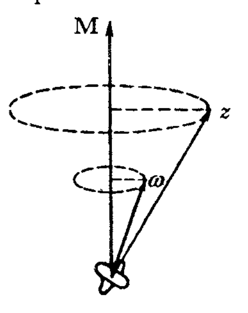


Рис. 5.29

Вектор $\boldsymbol{\omega}$, оставаясь постоянным по модулю, прецессирует вокруг направления вектора $\mathbf{M}$, описывая конус. Одновременно прецессирует ось симметрии волчка z, причем векторы $\mathbf{M}$, $\boldsymbol{\omega}$ и ось z все время находятся в одной плоскости. Волчок вращается вокруг оси z с угловой скоростью $\omega_z = M_z/I_z$, где M_z — проекция вектора $\mathbf{M}$ на ось z, I_z — момент инерции волчка относительно этой оси. Угловая скорость прецессии равна $\omega_{\text{пр}} = M/I$, где I — одинаковое значение моментов инерции I_x и I_y.

Глава 6

Релятивистская механика

6.1. Специальная теория относительности

В § 2.1 было отмечено, что ньютоновская механика справедлива только для тел, движущихся со скоростями, много меньшими скорости света в вакууме (эту скорость принято обозначать буквой c). Для описания движений, совершающихся со скоростями, сравнимыми с c, Эйнштейн[1]) создал релятивистскую механику, т. е. механику, учитывающую требования специальной теории относительности.

Созданная Эйнштейном в 1905 г. специальная теория относительности (СТО) представляет собой физическую теорию пространства и времени для случая пренебрежимо слабых гравитационных полей. Основу этой теории образуют два постулата, которые носят названия принципа относительности Эйнштейна и принципа постоянства скорости света.

Принцип относительности Эйнштейна является распространением механического принципа Галилея (см. § 2.7) на все без исключения физические явления. Согласно этому принципу *все законы природы одинаковы во всех инерциальных системах отсчета.* Неизменность вида уравнения при замене в нем координат и времени одной системы отсчета координатами и временем другой системы называется инвариантностью уравнения. Поэтому принцип относительности можно сформулировать следующим образом: *уравнения, выражающие законы природы, инвариантны по отношению к преобразованиям координат и времени от одной инерциальной системы отсчета к другой.*

Принцип постоянства скорости света утверждает, что *скорость света в вакууме не зависит от движения источников света и, следовательно, одинакова во всех*

---

[1]) Альберт Эйнштейн (1879–1955) — немецкий физик-теоретик, один из основателей современной физики.

инерциальных системах отсчета[2]).

Постоянство скорости света приводит к тому, что понятие одновременности, считающееся в ньютоновской механике абсолютным, в действительности является относительным. В пояснение этого часто приводят следующий пример. Пусть из середины равномерно движущегося поезда испускается в обоих направлениях световой сигнал (рис. 6.1). В любой инерциальной системе отсчета свет распространяется во всех направлениях с одинаковой скоростью c. Для пассажира поезда (т. е. в системе отсчета K') точки *1* и *2* неподвижны, поэтому сигнал достигает этих точек одновременно (рис. 6.1 *а*). Для дежурного по станции, стоящего на платформе, мимо которой проходит поезд (т. е. в системе отсчета K), точка *1* движется на-

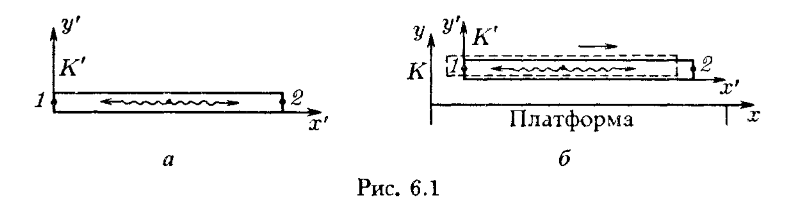


Рис. 6.1

встречу сигналу, точку же *2* сигналу приходится «догонять» (на рис. 6.1 *б* штриховой линией показано положение поезда в момент испускания сигнала). Поэтому в точку *1* сигнал приходит раньше, чем в точку *2*.

Из рассмотренного примера следует, что в разных системах отсчета время течет неодинаково.

Чтобы описать «точечное» событие (например, распад элементарной частицы), нужно указать, в каком месте и в какой момент времени оно происходит. Эта задача окажется осуществимой, если создать в пространстве равноотстоящие координатные метки и совместить с каждой такой меткой часы, по которым можно было бы определить момент времени, в который происходит событие в данном месте. Координатные метки можно нанести путем перекладывания единичного масштаба. В качестве часов можно взять любую систему, совершающую периодически повторяющийся процесс. Чтобы сравнивать моменты времени, в которые происходят два события в разных точках

[2]) Опыт Майкельсона и Морли, подтвердивший справедливость этого принципа, будет описан в кн. 4 этого курса.

пространства, нужно убедиться в том, что часы, находящиеся в этих точках, идут синхронно.

Синхронизацию можно, казалось бы, выполнить, поместив часы сначала рядом, а затем, после сверки их показаний, перенести часы в соответствующие точки пространства. Однако такой способ приходится отвергнуть, так как мы не знаем, как повлияет на ход часов их перенос из одного места в другое. Поэтому нужно сначала расставить часы по местам и лишь затем произвести сверку их показаний. Это можно сделать, посылая от одних часов к другим световой сигнал [3]). Пусть из точки A посылается в момент t_1 (отсчитанный по часам в A) световой сигнал, который отражается от зеркала, помещенного в точке B, и возвращается в A в момент t_2. Часы в B можно считать синхронными с часами в A, если в момент прихода в точку B сигнала часы в B показывали время t, равное $(t_1 + t_2)/2$. Такую сверку необходимо проделать для всех часов, расположенных в разных точках системы K. События в A и B будут считаться одновременными в системе K, если соответствующие им отсчеты времени по часам в A и B совпадут.

Аналогично производится синхронизация всех часов в системе K' и любой другой инерциальной системе отсчета. Скорость светового сигнала, с помощью которого осуществляется синхронизация, во всех инерциальных системах отсчета одна и та же. Этим и обусловлен выбор в качестве сигнала для синхронизации хода часов именно светового сигнала. Оказывается, что скорость света является предельной. Никакой сигнал, никакое воздействие одного тела на другое не могут распространяться со скоростью, превышающей скорость света в вакууме. Этим и объясняется одинаковость скорости света в вакууме во всех системах отсчета. Согласно принципу относительности законы природы во всех инерциальных системах должны быть одинаковы. Тот факт, что скорость сигнала не может превышать предельного значения, есть также закон природы. Поэтому значение предельной скорости должно быть одинаково во всех системах отсчета.

Постоянство скорости света приводит к тому, что пространство и время оказываются взаимосвязанными, образуя единое пространство-время. Эта взаимосвязь может быть представлена особенно отчетливо с помощью

[3]) Проверка часов по радиосигналам представляет собой по существу такую синхронизацию.

воображаемого четырехмерного пространства, по трем осям которого откладываются пространственные координаты x, y и z, а по четвертой оси — время t, точнее — пропорциональная t временная координата ct, имеющая ту же размерность, что и пространственные координаты. Конечно, представить себе наглядно, «осязаемо» четыре оси, образующие друг с другом прямые углы, невозможно, ибо наша способность создавать зримые образы основывается на жизненном опыте, а этот опыт относится к обычному трехмерному пространству. Однако в создании зримых образов четырех взаимно перпендикулярных осей нет необходимости. Достаточно представлять такие оси «разумом».

«Точечному» событию отвечает в воображаемом четырехмерном пространстве точка с координатами x, y, z и ct. Эту точку принято называть *мировой точкой*. Всякой частице (даже неподвижной) соответствует в четырехмерном пространстве некоторая линия, называемая *мировой линией* (для покоящейся частицы она имеет вид прямой линии, параллельной оси ct).

Итак, пространство и время являются частями единого целого. Однако время качественно отличается от пространства. Это проявляется в том, что воображаемое четырехмерное пространство отличается по своим свойствам от обычного трехмерного пространства. Обычное пространство обладает так называемой евклидовой метрикой. Это означает, что квадрат расстояния Δl между двумя точками равен сумме квадратов разностей координат:

$$\Delta l^2 = \Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2.$$

Квадрат «расстояния» между двумя мировыми точками (это «расстояние» называют *интервалом* и обозначают символом Δs) определяется формулой

$$\Delta s^2 = c^2 \Delta t^2 - \Delta x^2 - \Delta y^2 - \Delta z^2 \qquad (6.1)$$

(свойства интервала рассматриваются в § 6.3).

Пространства, для которых квадрат расстояния определяется формулой вида (6.1), называются *псевдоевклидовыми*. Качественное различие между временем и пространством проявляется в том, что квадрат временной координаты и квадраты пространственных координат входят в выражение (6.1) с разными знаками.

В специальной теории относительности особую роль играют величины, являющиеся **инвариантными** по отношению к преобразованиям координат и времени от одной инерциальной системы отсчета к другой (иными словами, величины, имеющие одинаковое числовое значение во всех инерциальных системах отсчета). Одну из таких величин мы уже знаем — это скорость света в вакууме. В § 6.3 мы покажем, что определяемый формулой (6.1) интервал также является инвариантом.

Особую роль играют формулы и соотношения, инвариантные по отношению к указанным выше преобразованиям (т. е. имеющие одинаковый вид во всех инерциальных системах отсчета). Например, релятивистские выражения для импульса и энергии определяются таким образом, чтобы законы сохранения этих величин не нарушались при переходе к другой инерциальной системе отсчета. В ходе дальнейшего изложения мы познакомимся с рядом инвариантных величин и соотношений.

6.2. Преобразования Лоренца

Рассмотрим две инерциальные системы отсчета, которые мы обозначим буквами K и K' (рис. 6.2). Пусть система K' движется относительно системы K со скоростью $\mathbf{v}_0$. Направим оси x и x' вдоль вектора $\mathbf{v}_0$; оси y и y', а также z и z' предположим параллельными друг другу.

В силу принципа относительности системы K и K' совершенно равноправны. Единственное формальное различие их заключается в том, что отсчитанная в системе K иксовая координата начала O' системы K' изменяется по закону

$$x_{O'} = v_0 t, \qquad (6.2)$$

в то время как отсчитанная в системе K' иксовая координата начала O системы K изменяется по закону

$$x'_O = -v_0 t'. \qquad (6.3)$$

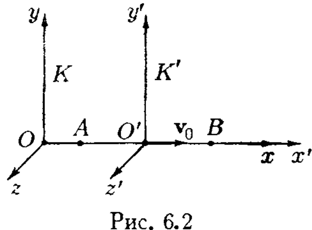


Рис. 6.2

Это различие вызвано тем, что направления осей x и x' мы выбрали одинаковыми, а системы K и K' движутся относительно друг друга в противоположных направлениях.

Поэтому проекция относительной скорости на ось x системы K равна v_0, а на ось x' системы K' равна $-v_0$.

В нерелятивистской механике переход от координат и времени одной инерциальной системы отсчета к координатам и времени другой инерциальной системы осуществляется с помощью преобразований Галилея (2.2). Из этих преобразований вытекает закон сложения скоростей: $\mathbf{v} = \mathbf{v}' + \mathbf{v}_0$ (см. формулу (2.4)). Этот закон находится в противоречии с принципом постоянства скорости света. Действительно, если в системе K' световой сигнал распространяется в направлении вектора $\mathbf{v}_0$ со скоростью c, то согласно (2.4) в системе K скорость сигнала окажется равной $c + v_0$, т. е. превзойдет c. Отсюда следует, что преобразования Галилея должны быть заменены другими формулами. Эти формулы нетрудно найти.

В самом общем виде преобразования координат и времени от системы K' к системе K выглядят следующим образом:

$$\begin{aligned} x &= f_1(x', y', z', t'), \quad & y &= f_2(x', y', z', t'), \\ z &= f_3(x', y', z', t'), \quad & t &= f_4(x', y', z', t'). \end{aligned} \tag{6.4}$$

Из однородности времени и пространства следует, что формулы (6.4) должны быть линейными, т. е. иметь вид

$$x = \alpha_1 x' + \alpha_2 y' + \alpha_3 z' + \alpha_4 t' + \alpha_5 \tag{6.5}$$

и т. д., где $\alpha_1, \alpha_2 \dots$ — константы. Соответственно

$$dx = \alpha_1\, dx' + \alpha_2\, dy' + \alpha_3\, dz' + \alpha_4\, dt' \tag{6.6}$$

и т. д. Действительно, согласно (6.4)

$$dx = \frac{\partial f_1}{\partial x'} dx' + \frac{\partial f_1}{\partial y'} dy' + \frac{\partial f_1}{\partial z'} dz' + \frac{\partial f_1}{\partial t'} dt' \tag{6.7}$$

и т. д.

Если взять некоторые произвольно выбранные dx', dy', dz' и dt' в точке x'_1, y'_1, z'_1, t'_1, то, подставив в (6.7) значения производных в данной точке, мы получим для dx некоторое значение dx_1. Однако в силу однородности пространства и времени в любой другой точке x'_2, y'_2, z'_2, t'_2 при тех же значениях dx' dy', dz', dt' должно получаться для dx такое же значение, как и в первой точке, т. е. должно

быть $dx_2 = dx_1$. То же самое должно иметь место для dy, dz и dt. Поскольку dx', dy', dz' и dt' были выбраны совершенно произвольно, указанное требование может выполняться лишь в том случае, если производные $\partial f_1/\partial x'$ и т. д. не зависят от координат, т. е. являются константами. Отсюда вытекает (6.6), а затем и (6.5).

При указанном на рис. 6.2 выборе координатных осей плоскость $y = 0$ совпадает с плоскостью $y' = 0$, а плоскость $z = 0$ — с плоскостью $z' = 0$. Отсюда следует, что, например, координаты y и y' должны обращаться в нуль одновременно, независимо от значений других координат и времени. Поэтому y и y' могут быть связаны только соотношением вида

$$y = \varepsilon y',$$

где ε — константа. В силу равноправности систем K и K' обратное соотношение должно иметь вид

$$y' = \varepsilon y$$

с тем же значением константы ε, что и в первом случае. Перемножив оба соотношения, получим, что $\varepsilon^2 = 1$, откуда $\varepsilon = \pm 1$. Знак плюс соответствует одинаково направленным осям y и y', знак минус — противоположно направленным. Направив оси одинаковым образом, получим

$$y = y'. \tag{6.8}$$

Аналогичные рассуждения приводят к формуле

$$z = z'. \tag{6.9}$$

Обратимся к нахождению преобразований для x и t. Из (6.8) и (6.9) следует, что значения y и z не зависят от x' и t'. Отсюда вытекает, что значения x' и t' не могут зависеть от y и z; соответственно значения x и t не могут зависеть от y' и z'. Таким образом, x и t могут быть линейными функциями только x' и t'.

Начало координат O системы K имеет координату $x = 0$ в системе K и $x' = -v_0 t'$ в системе K' (см. (6.3)). Следовательно, выражение $x' + v_0 t'$ должно обращаться в нуль одновременно с координатой x. Для этого линейное преобразование должно иметь вид

$$x = \gamma(x' + v_0 t'), \tag{6.10}$$

где γ — некоторая константа.

Аналогично, начало координат O' системы K' имеет координату $x' = 0$ в системе K' и $x = v_0 t$ в системе K (см. (6.2)). Отсюда следует, что

$$x' = \gamma(x - v_0 t). \tag{6.11}$$

Из равноправия систем K и K' вытекает, что коэффициент пропорциональности в обоих случаях должен быть один и тот же.

Для нахождения коэффициента γ используем принцип постоянства скорости света. Начнем отсчет времени в обеих системах от того момента, когда их начала координат совпадают. Пусть в момент $t = t' = 0$ в направлении осей x и x' посылается световой сигнал, который производит вспышку света на экране, расположенном в точке с координатой x в системе K и с координатой x' в системе K'. Это событие (вспышка) описывается координатой x и моментом t в системе K и координатой x' и моментом t' в системе K', причем

$$x = ct, \quad x' = ct'.$$

Подставив эти значения x и x' в формулы (6.10) и (6.11), получим

$$ct = \gamma(ct' + v_0 t') = \gamma(c + v_0)t',$$
$$ct' = \gamma(ct - v_0 t) = \gamma(c - v_0)t.$$

Перемножив оба соотношения, придем к уравнению

$$c^2 = \gamma^2(c^2 - v_0^2).$$

Отсюда

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - v_0^2/c^2}}. \tag{6.12}$$

Подстановка этого значения в (6.10) приводит к формуле

$$x = \frac{x' + v_0 t'}{\sqrt{1 - v_0^2/c^2}}. \tag{6.13}$$

Формула (6.13) позволяет по известным значениям x' и t' найти значение x. Чтобы получить формулу, позволяющую по известным значениям x' и t' найти значение t, исключим из (6.10) и (6.11) координату x и разрешим

получившееся соотношение относительно t. В результате получим

$$t = \gamma \left[t' + \frac{x'}{v_0} \left(1 - \frac{1}{\gamma^2} \right) \right].$$

Подстановка значения (6 12) для γ приводит к следующей формуле:

$$t = \frac{t' + (v_0/c^2)x'}{\sqrt{1 - v_0^2/c^2}}. \tag{6.14}$$

Совокупность формул (6.8), (6.9), (6.13) и (6.14) носит название **преобразований Лоренца**[4]. Если использовать общепринятое обозначение

$$\beta = v_0/c, \tag{6.15}$$

то преобразования Лоренца примут вид

$$x = \frac{x' + \beta c t'}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \quad y = y', \quad z = z', \qquad t = \frac{t' + (\beta/c)x'}{\sqrt{1 - \beta^2}}. \tag{6.16}$$

В преобразованиях Лоренца «перемешаны» координаты и время. Например, время t в системе K определяется не только временем t' в системе K', но также и координатой x'. В этом проявляется взаимосвязь пространства и времени.

По формулам (6.16) осуществляется переход от координат и времени, отсчитанных в системе K', к координатам и времени, отсчитанным в системе K (короче, переход от системы K' к системе K). Если разрешить уравнения (6.16) относительно штрихованных величин, получатся формулы преобразования для перехода от системы K к системе K':

$$x' = \frac{x - \beta c t}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \quad y' = y, \quad z' = z, \qquad t' = \frac{t - (\beta/c)x}{\sqrt{1 - \beta^2}}. \tag{6.17}$$

[4]) Хендрик Антон Лоренц (1853–1928) — нидерландский физик-теоретик

Как и следовало ожидать, учитывая равноправность систем K и K', формулы (6.17) отличаются от формул (6.16) только знаком при β, т. е. при v_0.

В пределе при $c \to \infty$ преобразования Лоренца переходят в преобразования Галилея (см. формулу (2.15)). Таким образом, различие в течении времени в разных инерциальных системах отсчета обусловлено существованием предельной скорости распространения взаимодействий.

При скоростях, много меньших скорости света (т. е. при $\beta \ll 1$), преобразования Лоренца практически не отличаются от преобразований Галилея. Следовательно, преобразования Галилея сохраняют значение для скоростей, малых по сравнению со скоростью света.

При $v_0 > c$ выражения для x, t, x' и t' в формулах (6.16) и (6.17) становятся мнимыми. В этом проявляется то обстоятельство, что движение со скоростями, большими c, невозможно. Невозможна даже система отсчета, движущаяся со скоростью c, потому что при $v_0 = c$ знаменатели формул для x и t обращаются в нуль.

Преобразования Лоренца имеют особенно простой и симметричный вид, если писать их не для x и t, а для x и ct, т. е. для величин одинаковой размерности. В этом случае формулы (6.16) выглядят следующим образом:

$$x = \frac{x' + \beta ct'}{\sqrt{1-\beta^2}}, \quad y = y', \quad z = z', \qquad ct = \frac{ct' + \beta x'}{\sqrt{1-\beta^2}}. \tag{6.18}$$

Формулы (6.18) легко запомнить, приняв во внимание, что первая из них отличается от «очевидной» формулы $x = x' + v_0 t'$ наличием в знаменателе характерного для релятивистских формул выражения $\sqrt{1-\beta^2}$. Последняя формула получается из первой, если поменять местами x' и ct'.

Из преобразований Лоренца вытекает ряд необычных с точки зрения ньютоновской механики следствий.

Одновременность событий в разных системах отсчета. Пусть в системе K в точках с координатами x_1 и x_2 происходят одновременно два события в момент времени $t_1 = t_2 = b$. Согласно последней из формул (6.17) в системе K' этим событиям будут соответствовать моменты

времени

$$t'_1 = \frac{b - (\beta/c)x_1}{\sqrt{1-\beta^2}}, \quad t'_2 = \frac{b - (\beta/c)x_2}{\sqrt{1-\beta^2}}.$$

Из этих формул видно, что в случае, если события в системе K пространственно разобщены ($x_1 \neq x_2$), то в системе K' они не будут одновременными ($t'_1 \neq t'_2$). Знак разности $t'_2 - t'_1$ определяется знаком выражения $(\beta/c)(x_1 - x_2)$; следовательно, в разных системах K' (при разных β) разность $t'_2 - t'_1$ будет различна по величине и может различаться по знаку. Это означает, что в одних системах событие *1* будет предшествовать событию *2*, в других системах, наоборот, событие *2* будет предшествовать событию *1*. Заметим, что сказанное относится лишь к событиям, между которыми отсутствует причинная связь. Причинно связанные события (например, бросание камня и падение его на Землю) ни в одной из систем отсчета не будут одновременными, и во всех системах событие, являющееся причиной, будет предшествовать следствию. Рождение элементарной частицы во всех системах отсчета происходит раньше ее распада. Ни в одной из систем сын не рождается раньше отца. Подробнее об этом пойдет речь в § 6.3.

Длина тел в разных системах. Рассмотрим стержень, расположенный вдоль оси x' и покоящийся относительно системы отсчета K' (рис. 6.3). Длина его в этой системе равна $l_0 = x'_2 - x'_1$, где x'_1 и x'_2 — не изменяющиеся со временем t' координаты концов стержня. Относительно системы K стержень движется со скоростью $v = v_0$. Для определения его длины в этой системе нужно отметить координаты концов стержня x_1 и x_2 в один и тот же момент времени $t_1 = t_2 = b$. Их разность $l = x_2 - x_1$ даст длину стержня, измеренную в системе K. Чтобы найти соотношение между l_0 и l, следует взять ту из формул преобразований Лоренца, которая содержит x', x и t, т. е. первую из формул (6.17). Заменив в этой формуле β на

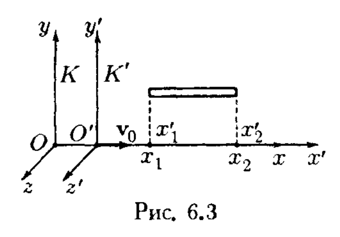


Рис. 6.3

v_0/c, получим

$$x_1' = \frac{x_1 - v_0 b}{\sqrt{1 - v_0^2/c^2}}, \quad x_2' = \frac{x_2 - v_0 b}{\sqrt{1 - v_0^2/c^2}}$$

откуда

$$x_2' - x_1' = \frac{x_2 - x_1}{\sqrt{1 - v_0^2/c^2}}.$$

Воспользовавшись обозначениями l и l_0, а также заменив относительную скорость систем отсчета v_0 равной ей скоростью v стержня относительно системы K, придем к соотношению

$$l = l_0\sqrt{1 - v^2/c^2}. \qquad (6.19)$$

Таким образом, длина стержня l, измеренная в системе, относительно которой он движется, оказывается меньше длины l_0, измеренной в системе, относительно которой стержень покоится [5]).

Если стержень длины $l_0 = x_2 - x_1$ покоится относительно системы K, то для определения его длины в системе K' нужно отметить координаты концов x_1' и x_2' в один и тот же момент времени $t_1' = t_2' = b$. Разность $l = x_2' - x_1'$ даст длину стержня в системе K', относительно которой он движется со скоростью v. Использовав первое из уравнений (6.16), снова придем к соотношению (6.19).

Заметим, что в направлении осей y и z размеры стержня одинаковы во всех системах отсчета.

Итак, у движущихся тел размеры их в направлении движения сокращаются тем больше, чем больше скорость движения. Это явление называется лоренцевым (или фитцджеральдовым) сокращением.

Любопытно, что визуально (или на фотографии) изменение формы тел, даже при сравнимых с c скоростях, не может быть обнаружено. Причина этого весьма проста. Наблюдая визуально или фотографируя какое-либо тело, мы регистрируем импульсы света от разных участков тела, достигшие одновременно сетчатки глаза или фотопластинки. Испускаются же эти импульсы неодновре-

[5]) Иногда длину l_0, измеренную в системе, относительно которой стержень покоится, называют собственной длиной стержня.

менно. Импульсы от более удаленных участков были испущены раньше, чем от более близких участков. Таким образом, если тело движется, на сетчатке глаза или на фотоснимке получается искаженное изображение тела. Соответствующий расчет показывает, что следствием указанного искажения будет компенсация лоренцева сокращения [6]), так что тела кажутся не искаженными, а лишь повернутыми. Следовательно, тело сферической формы даже при больших скоростях движения будет восприниматься визуально как тело сферического очертания.

Промежуток времени между событиями. Пусть в одной и той же точке системы K' происходят два события. Первому событию соответствует в этой системе координата $x'_1 = a$ и момент времени t'_1, второму событию — координата $x'_2 = a$ и момент времени t'_2. Согласно последней из формул (6.16) этим событиям соответствуют в системе K моменты времени

$$t_1 = \frac{t'_1 + (v_0/c^2)a}{\sqrt{1 - v_0^2/c^2}}, \quad t_2 = \frac{t'_2 + (v_0/c^2)a}{\sqrt{1 - v_0^2/c^2}}$$

(мы заменили β на v_0/c). Отсюда

$$t_2 - t_1 = \frac{t'_2 - t'_1}{\sqrt{1 - v_0^2/c^2}}.$$

Введя обозначения $t_2 - t_1 = \Delta t$ и $t'_2 - t'_1 = \Delta t'$, получим формулу

$$\Delta t = \frac{\Delta t'}{\sqrt{1 - v_0^2/c^2}}, \qquad (6.20)$$

которая связывает промежутки времени между двумя событиями, измеренные в системах K и K'. Напомним, что в системе K' оба события происходят в одной и той же точке: $x'_1 = x'_2$.

Допустим, что оба события происходят с одной и той же частицей, которая покоится в системе K' и движется

[6]) Если бы лоренцева сокращения не было, быстро движущиеся тела должны были бы представляться вытянутыми в направлении движения.

относительно системы K со скоростью $v = v_0$. Тогда $\Delta t'$ можно трактовать как промежуток времени, измеренный по часам, неподвижным относительно частицы, или, иными словами, измеренный по часам, движущимся вместе с частицей (имеется в виду движение по отношению к системе K). Время, отсчитанное по часам, движущимся вместе с телом, называется собственным временем этого тела и обозначается обычно буквой τ. Таким образом, $\Delta t' = \Delta\tau$. С учетом этого формуле (6.20) можно придать вид

$$\Delta\tau = \Delta t\sqrt{1 - v^2/c^2} \tag{6.21}$$

(мы заменили относительную скорость систем отсчета v_0 равной ей скоростью v частицы).

Формула (6.21) связывает собственное время тела τ с временем t, отсчитанным по часам системы отсчета, относительно которой тело движется со скоростью $\mathbf{v}$ (сами эти часы движутся относительно тела со скоростью $-\mathbf{v}$). Из (6.21) видно, что собственное время всегда меньше, чем время, отсчитанное по часам, движущимся относительно тела.

В какой бы системе отсчета ни рассматривалось движение частицы, промежуток собственного времени измеряется по часам системы, в которой частица покоится. Отсюда следует, что промежуток собственного времени является инвариантом, т. е. величиной, имеющей одно и то же значение во всех инерциальных системах отсчета.

Рассматривая происходящие с частицей события в системе K, можно определить Δt как промежуток времени, измеренный по неподвижным часам, а $\Delta\tau$ — как промежуток времени, измеренный по часам, движущимся со скоростью v. Согласно (6.21) $\Delta\tau < \Delta t$; поэтому можно сказать, что движущиеся часы идут медленнее, чем покоящиеся часы (имеется в виду, что во всем, кроме скорости движения, часы совершенно идентичны).

Соотношение (6.21) получило непосредственное экспериментальное подтверждение. В составе космических лучей имеются частицы, именуемые мюонами. Эти частицы нестабильны — они распадаются самопроизвольно на электрон (или позитрон) и два нейтрино. Среднее время жизни, измеренное в условиях, когда они неподвижны (или движутся с малой скоростью), составляет около

$2 \cdot 10^{-6}$ с. Казалось бы, что, даже двигаясь со скоростью света, мюоны могут пройти лишь путь порядка 600 м. Однако, как показывают наблюдения, мюоны образуются в космических лучах на высоте 20–30 км и успевают в значительном количестве достигнуть земной поверхности. Это объясняется тем, что $2 \cdot 10^{-6}$ с — собственное время жизни мюона, т. е. время, измеренное по часам, движущимся вместе с ним. Время, отсчитанное по часам экспериментатора, связанного с Землей, оказывается гораздо большим (см. формулу (6.21); скорость v мюона близка к скорости света). Поэтому нет ничего удивительного в том, что этот экспериментатор наблюдает пробег мюона, значительно больший 600 м. Отметим, что с позиции наблюдателя, движущегося вместе с мюоном, расстояние, пролетаемое им до поверхности Земли, сокращается до 600 м (см. формулу (6.19)), так что мюон успевает пролететь это расстояние за $2 \cdot 10^{-6}$ с.

6.3. Интервал

В обычном пространстве расстояние Δl между двумя точками с координатами x_1, y_1, z_1 и x_2, y_2, z_2 определяется выражением

$$\Delta l = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2}, \tag{6.22}$$

где $\Delta x = x_2 - x_1$ и т. д. Это расстояние не зависит от выбора системы координат, т. е. является инвариантом. При переходе к другой координатной системе изменяются, вообще говоря, величины Δx, Δy и Δz, однако эти изменения таковы, что расстояние Δl остается одним и тем же.

Казалось бы, что расстояние (или, как принято говорить, интервал) между двумя мировыми точками в четырехмерном пространстве-времени должно определяться аналогичным выражением

$$\Delta s = \sqrt{c^2\Delta t^2 + \Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2}, \tag{6.23}$$

где $\Delta t = t_2 - t_1$ и т. д. Однако это выражение непригодно в качестве интервала, поскольку оно не является инвариантом — при переходе к другой инерциальной системе отсчета числовое значение этого выражения изменяется.

Инвариантным, как мы покажем, является выражение

$$\Delta s = \sqrt{c^2\Delta t^2 - \Delta x^2 - \Delta y^2 - \Delta z^2}, \tag{6.24}$$

которое называют **интервалом** между событиями. Величина Δs является аналогом расстояния Δl между точками в обычном пространстве.

Причина того, что интервал определяется не выражением (6.23), а выражением (6.24), заключается в том, что, как говорят, метрика пространства–времени отличается от метрики обычного трехмерного пространства. В обычном пространстве справедлива евклидова геометрия, вследствие чего его называют **евклидовым**. Качественное различие между временем и пространством приводит к тому, что в выражение для интервала квадрат временной координаты и квадраты пространственных координат входят с разными знаками. Пространство, в котором расстояние между точками определяется выражением вида (6.24), называется **псевдоевклидовым**.

С учетом формулы (6.22) выражение (6.24) можно написать в виде

$$\Delta s = \sqrt{c^2\Delta t^2 - \Delta l^2}, \tag{6.25}$$

где Δl — расстояние между точками обычного пространства, в которых произошли данные события.

Допустим, что рассматриваются события, происходящие с одной и той же частицей. Тогда отношение $\Delta l/\Delta t$ дает скорость частицы v. Поэтому, вынеся в (6.25) из-под корня $c\Delta t$, получим, что

$$\Delta s = c\Delta t\sqrt{1 - (\Delta l/c\Delta t)^2} = c\Delta t\sqrt{1 - v^2/c^2}.$$

Согласно (6.21) выражение $\Delta t\sqrt{1 - v^2/c^2}$ равно $\Delta\tau$ — промежутку собственного времени частицы между событиями. Таким образом, мы приходим к соотношению

$$\Delta s = c\Delta\tau. \tag{6.26}$$

Поскольку c — константа, а $\Delta\tau$ — инвариант, интервал Δs также оказывается инвариантом.

Убедимся в инвариантности интервала еще одним способом. В соответствии с (6.24) квадрат интервала в системе K определяется выражением

$$\Delta s^2 = c^2\Delta t^2 - \Delta x^2 - \Delta y^2 - \Delta z^2. \tag{6.27}$$

В системе K' квадрат интервала между теми же событиями равен

$$\Delta s'^2 = c^2\Delta t'^2 - \Delta x'^2 - \Delta y'^2 - \Delta z'^2. \tag{6.28}$$

Согласно формулам (6.17)

$$\Delta x' = \frac{\Delta x - V\Delta t}{\sqrt{1-\beta^2}}, \quad \Delta y' = \Delta y,$$
$$\Delta z' = \Delta z, \quad \Delta t' = \frac{\Delta t - (V/c^2)\Delta x}{\sqrt{1-\beta^2}}.$$

Подстановка этих значений в выражение (6.28) дает

$$\Delta s'^2 = c^2\frac{[\Delta t - (v_0/c^2)\Delta x]^2}{1-\beta^2} - \frac{(\Delta x - v_0\Delta t)^2}{1-\beta^2} - \Delta y^2 - \Delta z^2 = c^2\Delta t^2 - \Delta x^2 - \Delta y^2 - \Delta z^2 = \Delta s^2$$

(напомним, что $\beta = v_0/c$). Таким образом, инвариантность интервала доказана.

Итак, мы знаем уже три инвариантные величины: скорость света в вакууме c, промежуток собственного времени $\Delta\tau$ и интервал между событиями Δs.

В отличие от расстояния Δl, квадрат которого всегда положителен (а само Δl вещественно), квадрат интервала, определяемого формулой (6.25), может быть положительным (если $c\Delta t > \Delta l$), либо отрицательным (если $c\Delta t < \Delta l$), либо равным нулю (если $c\Delta t = \Delta l$). Последний случай имеет место для событий, заключающихся в испускании светового сигнала из одной мировой точки и приходе его в другую мировую точку (за время Δt световой сигнал проходит в вакууме путь $\Delta l = c\Delta t$). Соответственно интервал Δs может быть вещественным (если $\Delta s^2 > 0$), мнимым (если $\Delta s^2 < 0$) и равным нулю (для светового сигнала).

Вследствие инвариантности интервал будет вещественным, либо мнимым, либо равным нулю во всех инерциальных системах отсчета.

Для вещественного интервала

$$c^2\Delta t^2 - \Delta l^2 = c^2\Delta t'^2 - \Delta l'^2 > 0.$$

Отсюда следует, что существует такая система K', в которой $\Delta l' = 0$, т. е. события, разделенные вещественным интервалом, могут быть пространственно совмещенными. Однако не существует системы, в которой $\Delta t' = 0$ (при таком значении $\Delta t'$ интервал стал бы мнимым). Таким образом, события, разделенные вещественным интервалом, ни в какой системе отсчета не могут быть одновременными. В соответствии с этим вещественные интервалы называются *времениподобными*.

Для мнимого интервала

$$c^2\Delta t^2 - \Delta l^2 = c^2\Delta t'^2 - \Delta l'^2 < 0.$$

Следовательно, существует такая система K', в которой $\Delta t' = 0$, т. е. события оказываются одновременными. Однако не существует системы, в которой $\Delta l' = 0$ (при таком значении $\Delta l'$ интервал стал бы вещественным). Таким образом, события, разделеннные мнимым интервалом, ни в какой системе отсчета не могут оказаться пространственно совмещенными. В соответствии с этим мнимые интервалы называются *пространственноподобными*.

Расстояние Δl между точками, в которых происходят события, разделенные пространственноподобным интервалом, превышает $c\Delta t$. Поэтому такие события не могут воздействовать друг на друга и, следовательно, не могут быть причинно связанными друг с другом (не существует воздействий, распространяющихся со скоростью, большей c). Причинно связанные события могут быть разделены только времениподобным или нулевым интервалом.

Для события-причины и события-следствия

$$c\Delta t \geq \Delta l. \tag{6.29}$$

Согласно последней из формул (6.17)

$$\Delta t' = \frac{\Delta t - (v_0/c^2)\Delta x}{\sqrt{1-\beta^2}}.$$

Отсюда

$$\frac{\Delta t'}{\Delta t} = \frac{1 - (v_0/c^2)(\Delta x/\Delta t)}{\sqrt{1-\beta^2}} \tag{6.30}$$

Поскольку $|\Delta x| \leq \Delta l \leq c\Delta t$ (см. формулы (6.22) и (6.29)), отношение $|\Delta x|/\Delta t$ не превышает c; $v_0 < c$. Поэтому,

независимо от знака Δx, правая часть равенства (6.30) больше нуля и, следовательно, $\Delta t'$ и Δt имеют одинаковые знаки. Это означает, что событие-причина во всех системах отсчета происходит раньше события-следствия. Об этом уже шла речь в § 6.2.

6.4. Преобразование и сложение скоростей

Компоненты скорости v частицы в системе K определяются выражениями

$$v_x = \frac{dx}{dt}, \quad v_y = \frac{dy}{dt}, \quad v_z = \frac{dz}{dt}. \tag{6.31}$$

В системе K' компоненты скорости v' той же частицы равны

$$v'_{x'} = \frac{dx'}{dt'}, \quad v'_{y'} = \frac{dy'}{dt'}, \quad v'_{z'} = \frac{dz'}{dt'}. \tag{6.32}$$

Найдем формулы, связывающие нештрихованные компоненты скорости со штрихованными. Для этого воспользуемся преобразованиями Лоренца (6.16), заменив в них β на v_0/c. Из этих формул получаем, что

$$\begin{gathered} dx = \frac{dx' + v_0\,dt'}{\sqrt{1 - v_0^2/c^2}}, \quad dy = dy', \quad dz = dz', \\ dt = \frac{dt' + (v_0/c^2)\,dx'}{\sqrt{1 - v_0^2/c^2}}. \end{gathered} \tag{6.33}$$

Разделив первое из этих равенств на четвертое, придем к соотношению

$$\frac{dx}{dt} = \frac{dx' + v_0\,dt'}{dt' + (v_0/c^2)\,dx'} = \frac{dx'/dt' + v_0}{1 + (v_0/c^2)\,dx'/dt'},$$

которое с учетом (6.31) и (6.32) можно представить в виде

$$v_x = \frac{v'_x + v_0}{1 + v_0 v'_{x'}/c^2}. \tag{6.34}$$

Разделив второе и третье из равенств (6.33) на четвертое, получим еще два соотношения:

$$v_y = \frac{v'_{y'}\sqrt{1 - v_0^2/c^2}}{1 + v_0 v'_{x'}/c^2}, \quad v_z = \frac{v'_{z'}\sqrt{1 - v_0^2/c^2}}{1 + v_0 v'_{x'}/c^2}. \qquad (6\ 35)$$

По формулам (6 34) и (6.35) осуществляется преобразование скоростей при переходе от системы K' к системе K. Воспользовавшись преобразованиями Лоренца (6.17), легко получить формулы

$$v'_{x'} = \frac{v_x - v_0}{1 - v_0 v_x/c^2}, \quad v'_{y'} = \frac{v_y\sqrt{1 - v_0^2/c^2}}{1 - v_0 v_x/c^2},$$
$$v'_{z'} = \frac{v_z\sqrt{1 - v_0^2/c^2}}{1 - v_0 v_x/c^2}, \qquad (6.36)$$

по которым осуществляется преобразование скоростей при переходе от системы K к системе K'. Формулы (6.36) отличаются от формул (6.34) и (6.35), как и следовало ожидать, только знаком перед v_0.

При $v_0 \ll c$ полученные нами формулы переходят в формулы (2.16), по которым преобразуются скорости в ньютоновской механике.

Пусть частица движется параллельно осям x и x' в направлении скорости $\mathbf{v}_0$ (см. рис. 6.2). Тогда v_x совпадает с модулем скорости частицы v в системе K, а $v'_{x'}$ — с модулем скорости v' в системе K', и формула (6.34) имеет вид

$$v = \frac{v' + v_0}{1 + v_0 v'/c^2}. \qquad (6.37)$$

Скорости v, v' и v_0 коллинеарны и направлены в одну и ту же сторону. Следовательно, формула (6.37) выражает закон сложения скоростей. Если $v' = c$, то

$$v = \frac{c + v_0}{1 + v_0 c/c^2} = c.$$

Этот результат является само собой разумеющимся, поскольку в основе преобразований Лоренца, а следовательно, и формул преобразования скоростей лежит предполо-

жение, что скорость света в вакууме одинакова во всех системах отсчета.

Допустим, что $v' = c$, а $v_0 = c - \alpha$, где α — сколь угодно малая величина (выше отмечалось, что нельзя полагать $v_0 = c$, потому что в этом случае формулы преобразований Лоренца утрачивают смысл). Подстановка этих значений в (6.37) дает, что

$$v = \frac{c + (c - \alpha)}{1 + (c - \alpha)c/c^2} = c.$$

Таким образом, если каждая из складываемых скоростей не превышает c, то и результирующая скорость не может превысить c.

6.5. Релятивистский импульс

Законы сохранения, как и другие законы природы, должны соблюдаться во всех инерциальных системах отсчета, т. е. быть инвариантными по отношению к преобразованиям Лоренца. Проверим, является ли инвариантным закон сохранения импульса, определяемого как произведение массы тела на его скорость: $\mathbf{p} = m\mathbf{v}$.

Рассмотрим абсолютно неупругое центральное соударение двух одинаковых частиц массы m (рис. 6.4). В системе K' частицы до соударения летят навстречу друг

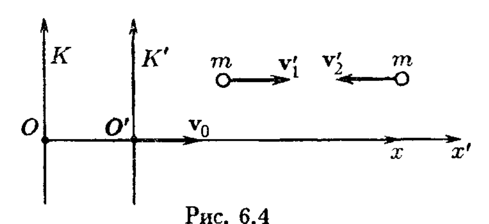


Рис. 6.4

другу параллельно оси x' со скоростями $\mathbf{v}'_1 = \mathbf{v}_0$ и $\mathbf{v}'_2 = -\mathbf{v}_0$. Модули обеих скоростей одинаковы и равны модулю относительной скорости систем K' и K ($v'_1 = v_0$, $v'_2 = v_0$). После соударения скорости частиц в системе K' равны нулю. Очевидно, что суммарный импульс частиц сохраняется в системе K' (до и после соударения он равен нулю). В этой системе компоненты скоростей частиц равны $v'_{1x'} = v_0$, $v'_{2x'} = -v_0$.

Перейдем в систему K. Согласно формуле (6.34)

$$v_{1x} = \frac{v'_{1x'} + v_0}{1 + v'_{1x'}/c^2} = \frac{v_0 + v_0}{1 + v_0 v_0/c^2} = \frac{2v_0}{1 + v_0^2/c^2},$$

$$v_{2x} = \frac{v'_{2x'} + v_0}{1 + v_0 v'_{2x'}/c^2} = \frac{-v_0 + v_0}{1 + v_0(-v_0)/c^2} = 0.$$

Таким образом, до соударения проекция на ось x суммарного импульса частиц равна

$$mv_{1x} + mv_{2x} = \frac{2mv_0}{1 + v_0^2/c^2}. \tag{6.38}$$

После соударения частицы покоятся в системе K', следовательно, движутся со скоростью $\mathbf{v}_0$ относительно системы K. Поэтому проекция суммарного импульса равна $2mv_0$.

Полученный нами результат означает, что в системе K закон сохранения импульса, определяемого как mv, не соблюдается. Только при условии, что скорости частиц много меньше c, отличием выражения (6.38) от $2mv_0$ можно пренебречь. Отсюда следует, что определение импульса в виде mv пригодно только при условии, что $v \ll c$. Для скоростей, сравнимых со скоростью света в вакууме, импульс должен быть определен как-то иначе.

Попытаемся найти такое выражение для импульса, чтобы закон сохранения импульса был инвариантен по отношению к преобразованиям Лоренца. При этом будем иметь в виду, что при малых скоростях ($v \ll c$) релятивистское выражение для импульса должно переходить в ньютоновское выражение

$$\mathbf{p} = m\mathbf{v} = m\frac{d\mathbf{r}}{dt}. \tag{6.39}$$

Предположим, что выражение для импульса частицы массы m имеет вид

$$\mathbf{p} = mf(v)\mathbf{v}, \tag{6.40}$$

где $\mathbf{v}$ — скорость, v — модуль скорости частицы, а $f(v)$ — некоторая безразмерная функция v. Для того чтобы при $v \ll c$ выражение (6.40) переходило в (6.39), функция $f(v)$ должна для таких скоростей практически равняться единице.

Рассмотрим абсолютно упругое соударение двух одинаковых частиц массы m в системе K_C их центра масс. В этой системе суммарный импульс частиц равен нулю. Следовательно, скорости частиц одинаковы по модулю и противоположны по направлению (рис. 6.5 *а*). В силу законов сохранения энергии и импульса скорости частиц после удара должны иметь тот же модуль, что и до удара, а направления скоростей должны быть противоположными.

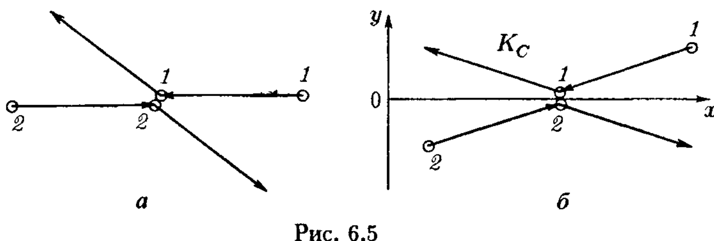


Рис. 6.5

Выберем оси координат так, чтобы скорости частиц лежали в плоскости $x\,y$ и располагались относительно оси x симметрично. Тогда соударение частиц в системе K_C будет выглядеть так, как показано на рис. 6.5 *б*.

Перейдем от системы отсчета K_C к системе K, относительно которой частица *1* движется параллельно оси y. В этой системе соударение выглядит так, как показано на рис. 6.6 *а*. Рядом со стрелками, изображающими скорости или их составляющие по координатным осям, указаны модули соответствующих скоростей или составляющих.

Мы исходили из того, что суммарный импульс частиц сохраняется при соударении в системе K_C. Потребуем, чтобы закон сохранения импульса выполнялся и в системе K. Из рис. 6.6 *а* видно, что иксовая компонента суммарного импульса частиц в системе K в результате соударения не изменяется. Должна оставаться неизменной также игрековая компонента суммарного импульса частиц. С учетом (6.40) это запишется аналитически следующим образом:

$$mf(w)(-w) + mf(\sqrt{v^2+u^2})u = \\ = mf(w)w + mf(\sqrt{v^2+u^2})(-u).$$

Отсюда вытекает, что

$$f(w)w = f(\sqrt{v^2+u^2})u. \tag{6.41}$$

Найдем связь между u и w. Для этого рассмотрим соударение в системе отсчета K', относительно которой частица *2* движется параллельно оси y' (рис. 6.6 *б*). Значения v, u и w на рис. 6.6 *а* и *б* одни и те же, так как вследствие симметрии задачи при переходе от системы K к системе K' частицы обмениваются скоростями.

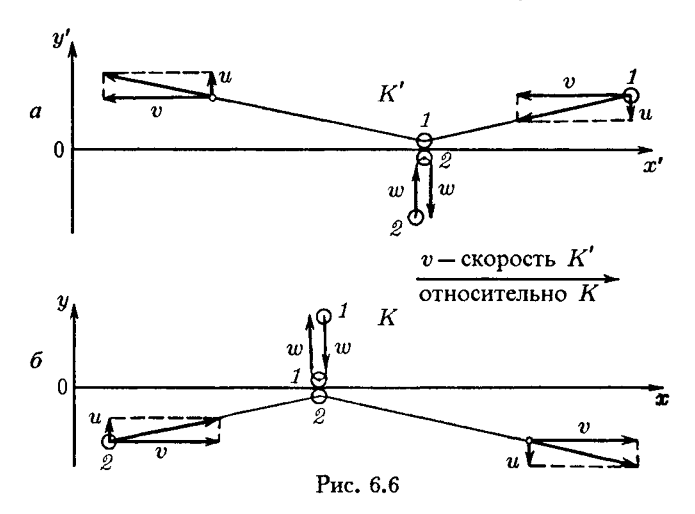


Рис. 6.6

Воспользуемся формулой преобразования игрековой компоненты скорости. В системе K' игрековая компонента v'_y начальной скорости частицы *2* равна w, а иксовая компонента v'_x равна нулю. В системе K игрековая компонента v_y начальной скорости частицы *2* равна u. Относительная скорость v_0 систем K' и K равна v. Итак, $v_y = u$, $v'_{y'} = w$, $v'_{x'} = 0$ и $v_0 = v$. Подставив эти значения в первую из формул (6.35), получим искомую связь между u и w:

$$u = w\sqrt{1 - v^2/c^2}.$$

Подстановка этого значения u в равенство (6.41) дает, что

$$f(w) = f(\sqrt{v^2 + u^2})\sqrt{1 - v^2/c^2}. \qquad (6.42)$$

Пусть w (а значит, и u) много меньше c, в то время как v порядка c (частицы летят почти параллельно оси x). Тогда $f(w)$ можно положить равной единице, а $\sqrt{v^2 + u^2}$

считать равным v. Саму же скорость v можно рассматривать не как составляющую скорости частицы по оси x, а как ее модуль. В этом случае соотношение (6.42) принимает вид

$$1 = f(v)\sqrt{1 - v^2/c^2},$$

откуда

$$f(v) = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}.$$

Подстановка этой функции в (6.40) приводит к релятивистскому выражению для импульса:

$$\mathbf{p} = \frac{m\mathbf{v}}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}. \qquad \textbf{(6.43)}$$

Выражение (6.43) можно представить в виде

$$\mathbf{p} = \frac{m}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}\frac{d\mathbf{r}}{dt} = m\frac{d\mathbf{r}}{d\tau}, \qquad (6.44)$$

где $d\tau$ — промежуток собственного времени частицы, за который она получает смещение $d\mathbf{r}$ (см. (6.21)). Отметим, что $d\mathbf{r}$ в формуле (6.44) есть перемещение частицы в той системе отсчета, в которой определяется импульс $\mathbf{p}$; промежуток времени $d\tau$ определяется по часам, движущимся вместе с частицей. Масса m представляет собой инвариантную и, следовательно, не зависящую от скорости тела величину [7]).

Из (6.43) следует, что зависимость импульса от скорости оказывается более сложной, чем это предполагается в ньютоновской механике. Отметим, что масса m и скорость $\mathbf{v}$ в (6.43) — это те же самые величины, с которыми имеют дело в ньютоновской механике. Это следует из того, что при $v \ll c$ выражение (6.43) переходит в ньютоновское выражение $\mathbf{p} = m\mathbf{v}$.

Проверим на примере, рассмотренном в начале этого параграфа, инвариантность закона сохранения импульса, определяемого формулой (6.43). В системе K', очевидно, сумма релятивистских импульсов частиц равна нулю как

---

[7]) Так называемую релятивистскую массу (т. е. массу, зависящую от скорости) мы не рассматриваем. Понятие релятивистской массы не адекватно существу теории относительности и только затуманивает смысл этой теории.

до, так и после соударения. В системе K проекция на ось x суммарного импульса частиц до соударения равна

$$\frac{mv_{1x}}{\sqrt{1-\frac{v_{1x}^2}{c^2}}} = \frac{m\cdot 2v_0}{\left(1+\frac{v_0^2}{c^2}\right)\sqrt{1-\left(\frac{2v_0/c}{1+v_0^2/c^2}\right)^2}} = \frac{2mv_0}{1-\frac{v_0^2}{c^2}}.$$

Если считать массу образовавшейся в результате абсолютно неупругого соударения составной частицы равной $2m$, то вычисленный по формуле (6.43) суммарный импульс после соударения окажется равным

$$2mv_0 \Big/ \sqrt{1-v_0^2/c^2}.$$

Таким образом, мы пришли к обескураживающему результату: в системе K импульс после соударения отличается от импульса до соударения.

Причина кажущегося несохранения импульса в системе K заключается в том, что, как мы увидим в § 6.8, масса M составной частицы равна не $2m$, а $2m\Big/\sqrt{1-v_0^2/c^2}$. Соответственно вычисленный по формуле (6.43) импульс после соударения будет равен

$$\frac{Mv_0}{\sqrt{1-v_0^2/c^2}} = \frac{2mv_0}{1-v_0^2/c^2},$$

т. е. совпадает с импульсом до соударения.

6.6. Релятивистское выражение для энергии

В теории относительности сохраняется ньютоновское соотношение между силой и скоростью изменения импульса: $d\mathbf{p}/dt = \mathbf{F}$. Подставив выражение (6.43) для импульса, получим релятивистское уравнение движения

$$\frac{d}{dt}\frac{m\mathbf{v}}{\sqrt{1-v^2/c^2}} = \mathbf{F}. \qquad (6.45)$$

Произведя дифференцирование, придем к равенству

$$\frac{m(d\mathbf{v}/dt)}{\sqrt{1-v^2/c^2}} + \frac{m(\mathbf{v}/c^2)(\mathbf{v}(d\mathbf{v}/dt))}{(1-v^2/c^2)^{3/2}} = \mathbf{F} \qquad (6.46)$$

(при дифференцировании стоящую в знаменателе под знаком корня величину v^2 нужно представить в виде $\mathbf{v}^2$). Производная $d\mathbf{v}/dt$ представляет собой ускорение частицы $\mathbf{w}$. Поэтому равенство (6.46) можно написать в виде

$$\frac{m\mathbf{w}}{\sqrt{1-v^2/c^2}} + \frac{m(\mathbf{v}/c^2)(\mathbf{vw})}{(1-v^2/c^2)^{3/2}} = \mathbf{F}. \tag{6.47}$$

Умножив обе части равенства скалярно на $\mathbf{v}$, получим

$$\frac{m(\mathbf{vw})}{\sqrt{1-v^2/c^2}} + \frac{m(v^2/c^2)(\mathbf{vw})}{(1-v^2/c^2)^{3/2}} = \mathbf{vF}.$$

Разрешив это уравнение относительно $\mathbf{vw}$, подставив полученное значение в (6.47) и произведя преобразования, придем к формуле

$$\mathbf{w} = \sqrt{1-v^2/c^2}\left(\frac{\mathbf{F}}{m} - \frac{\mathbf{vF}}{mc^2}\mathbf{v}\right). \tag{6.48}$$

Из формулы (6.48) следует, что в общем случае ускорение $\mathbf{w}$ не совпадает по направлению с силой $\mathbf{F}$ — кроме составляющей ускорения, направленной вдоль силы $\mathbf{F}$, имеется составляющая, направленная вдоль скорости $\mathbf{v}$. Вторая составляющая зависит от взаимной ориентации векторов $\mathbf{F}$ и $\mathbf{v}$. Только в двух случаях ускорение коллинеарно силе. Во-первых, когда направления силы и скорости совпадают. В этом случае

$$\frac{m}{(1-v^2/c^2)^{3/2}}\mathbf{w} = \mathbf{F} \tag{6.49}$$

(при получении этой формулы нужно учесть, что $(\mathbf{vF})\mathbf{v} = vF\mathbf{v} = v^2\mathbf{F}$. Во-вторых, когда сила перпендикулярна к скорости. В этом случае

$$\frac{m}{\sqrt{1-v^2/c^2}}\mathbf{w} = \mathbf{F}. \tag{6.50}$$

Уравнение (6.48) правильно описывает движение релятивистских частиц. Оно многократно подвергалось экспериментальной проверке в различных конфигурациях электрического и магнитного полей. Это уравнение является основой инженерных расчетов ускорителей элементарных частиц.

Из всего сказанного вытекает, что в релятивистской области масса перестает играть роль меры инертности тела. Более того, единой меры инертности для релятивистски движущихся частиц вообще не существует, поскольку сопротивление тела ускоряющей его силе зависит от угла между силой и скоростью.

Заметим, что ни импульс, ни сила не являются инвариантными величинами. Формулы преобразования компонент импульса при переходе от одной инерциальной системы отсчета к другой будут получены в следующем параграфе. Формулы преобразования компонент силы мы дадим без вывода:

$$F_x = \frac{F'_x + (\beta/c)\mathbf{F}'\mathbf{v}'}{1+\beta(v'_x/c)}, \quad F_y = \frac{F'_y\sqrt{1-\beta^2}}{1+\beta(v'_x/c)}, \quad F_z = \frac{F'_z\sqrt{1-\beta^2}}{1+\beta(v'_x/c)} \tag{6.51}$$

($\beta = v_0/c$, $\mathbf{v}'$ — скорость частицы в системе K'). Если в системе K' действующая на частицу сила $\mathbf{F}'$ перпендикулярна к скорости частицы $\mathbf{v}'$, скалярное произведение $\mathbf{F}'\mathbf{v}'$ равно нулю и первая из формул (6.51) упрощается следующим образом:

$$F_x = \frac{F'_x}{1+\beta(v'_x/c)}. \tag{6.52}$$

Теперь обратимся к рассмотрению вопроса, вынесенного в название этого параграфа. Поступим подобно тому, как мы действовали в § 3.2 при получении выражения для кинетической энергии тела. Умножим уравнение (6.45) на перемещение частицы $d\mathbf{s} = \mathbf{v}\,dt$. В результате получим

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{m\mathbf{v}}{\sqrt{1-v^2/c^2}}\right)\mathbf{v}\,dt = \mathbf{F}\,d\mathbf{s}.$$

Правая часть этого соотношения дает работу dA, совершаемую над частицей за время dt. В § 3.2 было показано, что работа результирующей всех сил идет на приращение кинетической энергии частицы (см. формулу (3.11)). Следовательно, левая часть соотношения должна быть истол-

кована как приращение кинетической энергии T частицы за время dt Таким образом,

$$dT = \frac{d}{dt}\left(\frac{m\mathbf{v}}{\sqrt{1-v^2/c^2}}\right)\mathbf{v}\,dt = \mathbf{v}\,d\left(\frac{m\mathbf{v}}{\sqrt{1-v^2/c^2}}\right).$$

Преобразуем полученное выражение, приняв во внимание, что $\mathbf{v}\,d\mathbf{v} = d(v^2/2)$ (см. (1.54)):

$$dT = \mathbf{v}\left\{\frac{m\,d\mathbf{v}}{\sqrt{1-v^2/c^2}} + \frac{m\mathbf{v}(\mathbf{v}\,d\mathbf{v}/c^2)}{(1-v^2/c^2)^{3/2}}\right\} =$$

$$= \frac{m\,d(v^2/2)}{(1-v^2/c^2)^{3/2}} = \frac{mc^2\,d(v^2/c^2)}{2(1-v^2/c^2)^{3/2}} = d\left(\frac{mc^2}{\sqrt{1-v^2/c^2}}\right).$$

Интегрирование полученного соотношения дает

$$T = \frac{mc^2}{\sqrt{1-v^2/c^2}} + \text{const}. \tag{6.53}$$

По смыслу кинетической энергии она должна обращаться в нуль при $v = 0$. Отсюда для константы получается значение, равное $-mc^2$. Следовательно, релятивистское выражение для кинетической энергии частицы имеет вид

$$T = \frac{mc^2}{\sqrt{1-v^2/c^2}} - mc^2 = mc^2\left(\frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}} - 1\right). \tag{6.54}$$

В случае малых скоростей ($v \ll c$) формулу (6.54) можно преобразовать следующим образом:

$$T = mc^2\left(\frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}} - 1\right) \approx mc^2\left(1 + \frac{1}{2}\frac{v^2}{c^2} - 1\right) = \frac{mv^2}{2}.$$

Мы пришли к ньютоновскому выражению для кинетической энергии частицы. Этого и следовало ожидать, поскольку при скоростях, много меньших скорости света, все формулы релятивистской механики должны переходить в соответствующие формулы ньютоновской механики.

Рассмотрим свободную частицу (т. е. частицу, не подверженную действию внешних сил), движущуюся со скоростью v. Мы выяснили, что эта частица обладает кинетической энергией, определяемой формулой (6.54). Однако имеются основания (см. ниже) приписать свободной частице, кроме кинетической энергии (6.54), дополнительную энергию, равную

$$E_0 = mc^2. \tag{6.55}$$

Таким образом, полная энергия свободной частицы определяется выражением $E = T + E_0 = T + mc^2$. Приняв во внимание (6.54), получим, что

$$E = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}. \tag{6.56}$$

При $v = 0$ выражение (6.56) переходит в (6.55). Поэтому энергию $E_0 = mc^2$ называют *энергией покоя*. Эта энергия представляет собой внутреннюю энергию частицы, не связанную с движением частицы как целого. Формулы (6.55) и (6.56) справедливы не только для элементарной частицы, но и для сложного тела, состоящего из многих частиц. Энергия E_0 такого тела содержит в себе, помимо энергий покоя входящих в его состав частиц, также кинетическую энергию частиц (обусловленную их движением относительно центра масс тела) и энергию их взаимодействия друг с другом. В энергию покоя, как и в полную[8]) энергию (6.56), не входит потенциальная энергия тела во внешнем силовом поле.

Исключив из уравнений (6.43) и (6.56) скорость v (уравнение (6.43) нужно взять в скалярном виде), получим выражение полной энергии частицы через импульс p:

$$E = c\sqrt{p^2 + m^2c^2}. \tag{6.57}$$

[8]) Отметим, что термин «полная энергия» имеет в релятивистской механике иной смысл, чем в ньютоновской механике. В ньютоновской механике полной энергией называется сумма кинетической и потенциальной энергий частицы. В релятивистской механике под полной энергией понимается сумма кинетической энергии и энергии покоя частицы.

В случае, когда $p \ll mc$, эту формулу можно представить в виде

$$E = mc^2\sqrt{1 + \left(\frac{p}{mc}\right)^2} \approx$$

$$\approx mc^2\left[1 + \frac{1}{2}\left(\frac{p}{mc}\right)^2\right] = mc^2 + \frac{p^2}{2m}. \quad (6.58)$$

Полученное выражение отличается от ньютоновского выражения для кинетической энергии $T = p^2/2m$ слагаемым mc^2.

Заметим, что из сопоставления выражений (6.43) и (6.56) вытекает формула

$$\mathbf{p} = \frac{E}{c^2}\mathbf{v}. \quad (6.59)$$

Поясним, почему свободной частице следует приписывать энергию (6.56), а не только кинетическую энергию (6.54). Энергия по своему смыслу должна быть сохраняющейся величиной. Соответствующее рассмотрение показывает, что при столкновениях частиц сохраняется сумма (по частицам) выражений вида (6.56), в то время как сумма выражений (6.54) оказывается несохраняющейся. Невозможно удовлетворить требованию сохранения энергии во всех инерциальных системах отсчета, если не учитывать энергию покоя (6.55) в составе полной энергии.

Кроме того, из выражения (6.56) для энергии и выражения (6.43) для импульса удается образовать инвариант, т. е. величину, не изменяющуюся при преобразованиях Лоренца. Действительно, из формулы (6.57) вытекает, что

$$\frac{E^2}{c^2} - p^2 = m^2c^2 = \mathrm{inv} \quad (6.60)$$

(напомним, что масса m и скорость c являются инвариантными величинами). Эксперименты над быстрыми частицами подтверждают инвариантность величины (6.60). Если под E в (6.60) понимать кинетическую энергию (6.54), выражение (6.60) оказывается неинвариантным.

Получим еще одно выражение для релятивистской энергии. Из формулы (6.21) следует, что

$$\frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}}=\frac{dt}{d\tau}, \tag{6.61}$$

где dt — промежуток времени между двумя происходящими с частицей событиями, отсчитанный по часам той системы отсчета, относительно которой частица движется со скоростью v, $d\tau$ — тот же промежуток времени, отсчитанный по часам, движущимся вместе с частицей (промежуток собственного времени). Подставив (6.61) в формулу (6.56), получим выражение

$$E=mc^2\frac{dt}{d\tau}. \tag{6.62}$$

Этой формулой мы воспользуемся в следующем параграфе.

6.7. Преобразования импульса и энергии

Полная энергия E и импульс $\mathbf{p}$ не являются инвариантами. Действительно, обе величины зависят от v, скорость же в различных системах отсчета имеет неодинаковое значение. Выясним, как преобразуются энергия и импульс при переходе от одной системы отсчета к другой.

Рассмотрим элементарное перемещение некоторой частицы. Пусть в системе отсчета K это перемещение осуществляется за время dt, а компоненты перемещения равны dx, dy, dz. В системе K' то же самое перемещение происходит за время dt', а его компоненты равны dx', dy', dz'. В соответствии с формулами (6.18) между промежутками времени и компонентами перемещения имеются соотношения

$$dx=\frac{dx'+\beta c\,dt'}{\sqrt{1-\beta^2}},\quad dy=dy',\quad dz=dz',$$

$$c\,dt=\frac{c\,dt'+\beta\,dx'}{\sqrt{1-\beta^2}}.$$

Умножим эти формулы на массу частицы m и разделим на соответствующее промежуткам dt и dt' собственное время частицы $d\tau$ (напомним, что масса и собственное время являются инвариантными величинами, т. е. имеют

одинаковое значение в обеих системах). В результате получим

$$m\frac{dx}{d\tau} = \frac{m(dx'/d\tau) + \beta mc(dt'/d\tau)}{\sqrt{1-\beta^2}},$$
$$m\frac{dy}{d\tau} = m\frac{dy'}{d\tau}, \quad m\frac{dz}{d\tau} = m\frac{dz'}{d\tau}, \tag{6.63}$$
$$mc\frac{dt}{d\tau} = \frac{mc(dt'/d\tau) + \beta m(dx'/d\tau)}{\sqrt{1-\beta^2}}.$$

Согласно (6.44) $m(dx/d\tau) = p_x$, $m(dx'/d\tau) = p'_x$, $m(dy/d\tau) = p_y$ и т. д. В соответствии с выражением (6.62) $mc(dt/d\tau) = E/c$, $mc(dt'/d\tau) = E'/c$. С учетом этого формулы (6.63) можно представить в виде

$$p_x = \frac{p'_x + \beta(E'/c)}{\sqrt{1-\beta^2}}, \quad p_y = p'_y, \quad p_z = p'_z,$$
$$(E/c) = \frac{(E'/c) + \beta p'_x}{\sqrt{1-\beta^2}}. \tag{6.64}$$

Мы получили формулы, по которым **преобразуются импульс и энергия** частицы при переходе от одной инерциальной системы отсчета к другой. Эти формулы совпадают с формулами (6.18), по которым преобразуются координаты и время. Чтобы легче было производить сопоставление, напишем формулы (6.18) и (6.64) рядом:

$$x = \frac{x' + \beta(ct')}{\sqrt{1-\beta^2}}, \quad p_x = \frac{p'_x + \beta(E'/c)}{\sqrt{1-\beta^2}},$$
$$y = y', \quad z = z', \quad p_y = p'_y, \quad p_z = p'_z, \tag{6.65}$$
$$(ct) = \frac{(ct') + \beta x'}{\sqrt{1-\beta^2}}, \quad (E/c) = \frac{(E'/c) + \beta p'_x}{\sqrt{1-\beta^2}}.$$

Из сопоставления следует, что компоненты импульса ведут себя при преобразованиях как координаты, а энергия — как время.

Вскрываемая формулами (6.65) аналогия позволяет представить математический аппарат релятивистской механики в виде соотношений между векторами в воображаемом четырехмерном пространстве (**четырехвекторами**). В § 6.1 мы уже отмечали, что этому пространству приходится приписывать необычные свойства, отличные от свойств привычного нам евклидова пространства. В трехмерном евклидовом пространстве величина

$$\Delta l^2 = \Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2$$

является инвариантом, т. е. не изменяется при поворотах координатных осей. В противоположность этому величина

$$c^2\Delta t^2 + \Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2 \qquad (6.66)$$

оказывается неинвариантной — она не сохраняется при переходе от одной инерциальной системы отсчета к другой (такой переход можно представить как поворот осей в четырехмерном пространстве). Следовательно, величина (6.66) не обладает свойствами квадрата расстояния между двумя мировыми точками. Инвариантным, как мы выяснили в § 6.3, является выражение

$$\Delta s^2 = c^2\Delta t^2 - \Delta x^2 - \Delta y^2 - \Delta z^2, \qquad (6.67)$$

которое и следует рассматривать как квадрат расстояния между двумя точками в интересующем нас четырехмерном пространстве[9]).

Наделив четырехмерное пространство такими свойствами, мы можем рассматривать величины ct, x, y, z как компоненты четырехвектора, проведенного из начала координат в данную мировую точку. Соответственно $c\Delta t$, Δx, Δy и Δz можно рассматривать как компоненты четырехвектора — перемещения из одной мировой точки в другую. В трехмерном евклидовом пространстве, кроме радиуса-вектора и вектора перемещения, рассматриваются и другие векторы (скорости, ускорения, силы и т. д.), причем для любого вектора **a** величина

$$\mathbf{a}^2 = a_x^2 + a_y^2 + a_z^2$$

---

[9]) Разумеется, можно рассматривать и евклидово четырехмерное пространство. Однако такое пространство для нужд релятивистской механики оказывается непригодным.

является инвариантом. Компоненты любого такого вектора преобразуются при поворотах координатных осей по таким же формулам, как и координаты.

По аналогии с трехмерными векторами в евклидовом пространстве можно определить четырехмерные векторы. Под четырехмерным вектором понимают совокупность четырех величин a_t, a_x, a_y, a_z, преобразующихся по тем же формулам, что и ct, x, y, z (см. левый столбец формул (6.65)). «Квадрат» такого вектора следует определить как

$$a_t^2 - a_x^2 - a_y^2 - a_z^2. \tag{6.68}$$

Вследствие того, что компоненты преобразуются так же, как координаты, выражение (6.68) оказывается инвариантным по отношению к преобразованиям Лоренца.

Из формул (6.65) следует, что совокупность величин

$$E/c, \quad p_x, \quad p_y, \quad p_z \tag{6.69}$$

образует четырехвектор. Его называют еще *вектором энергии-импульса*.

Образованное из компонент (6.69) выражение вида (6.68) является, как мы установили (см. (6.60)), инвариантом:

$$(E/c)^2 - p_x^2 - p_y^2 - p_z^2 = m^2c^2.$$

6.8. Взаимосвязь массы и энергии покоя

Согласно формуле (6.55) масса тела и его энергия покоя связаны соотношением

$$E_0 = mc^2, \tag{6.70}$$

из которого вытекает, что всякое изменение массы тела Δm сопровождается изменением энергии покоя ΔE_0, причем эти изменения пропорциональны друг другу:

$$\Delta E_0 = c^2 \Delta m. \tag{6.71}$$

Это утверждение носит название *закона взаимосвязи массы и энергии покоя*.

Взаимосвязь m и E_0 приводит к тому, что масса взаимодействующих частиц оказывается неаддитивной. Убедимся в этом на следующем примере. Пусть две одинаковые частицы массы m, движущиеся с равными по модулю

и противоположно направленными скоростями, претерпевают абсолютно неупругое соударение, в результате которого образуется новая неподвижная частица. До соударения полная энергия каждой частицы равна

$$mc^2 \Big/ \sqrt{1 - v^2/c^2}.$$

Полная энергия образовавшейся частицы равна Mc^2, где M — масса новой частицы. Из закона сохранения энергии следует, что

$$2mc^2 \Big/ \sqrt{1 - v^2/c^2} = Mc^2,$$

откуда

$$M = \frac{2m}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} > 2m$$

(см. пример, рассмотренный в конце § 6.5).

Таким образом, масса образовавшейся частицы больше суммы масс исходных частиц. Это обусловлено тем, что кинетическая энергия частиц превратилась в эквивалентное количество энергии покоя, а это в свою очередь привело к возрастанию массы на $\Delta m = \Delta E_0/c^2$.

При распаде неподвижной частицы на несколько разлетающихся в разные стороны частиц наблюдается обратное явление — сумма масс образовавшихся частиц оказывается меньше массы исходной частицы на величину, равную суммарной кинетической энергии этих частиц, деленной на c^2.

Рассмотрим тело, состоящее из N частиц с массами $m_1, m_2, \ldots, m_N$. Тело не будет распадаться на образующие его частицы при условии, что они связаны друг с другом. Эту связь можно охарактеризовать энергией $E_{\text{св}}$, которую нужно затратить, чтобы разорвать связь между частицами и разнести их на такие расстояния, при которых взаимодействием частиц друг с другом можно пренебречь. Энергию $E_{\text{св}}$ называют *энергией связи* системы частиц. В соответствии с формулой (6.71)

$$E_{\text{св}} = c^2 \sum_{i=1}^{N} m_i - Mc^2, \qquad (6.72)$$

где M — масса системы (масса тела).

Из формулы (6.72) следует, что энергия связи будет положительной в том случае, когда масса тела M меньше суммы масс образующих тело частиц.

При слиянии частиц высвобождается энергия $E_{св}$ (например, в виде электромагнитного излучения). Чтобы разделить тело на частицы, из которых оно состоит, нужно затратить энергию $E_{св}$.

Работа атомных электростанций основывается на цепной реакции деления ядер урана $^{235}_{92}\mathrm{U}$ (или плутония) при захвате медленных нейтронов n [10]). Деление осуществляется разными путями. Один из них выглядит следующим образом:

$$^{235}_{92}\mathrm{U} + \mathrm{n} \to {}^{236}_{92}\mathrm{U} \to {}^{140}_{55}\mathrm{Cs} + {}^{94}_{37}\mathrm{Rb} + 2\mathrm{n}. \qquad (6.73)$$

Захватив нейтрон, ядро урана распадается на ядро цезия с массовым числом 140 и ядро рубидия с массовым числом 94. Кроме того, выделяется два нейтрона. Суммарная масса ядра урана-235 и нейтрона превосходит суммарную массу частиц в правой части формулы (6.73) примерно на $4\cdot 10^{-28}$ кг. Отвечающая этому избытку массы внутренняя энергия, равная

$$E = c^2 \Delta m = (3 \cdot 10^8)^2 \cdot 4 \cdot 10^{-28} \approx 4 \cdot 10^{-11}\ \text{Дж},$$

превращается в кинетическую энергию образующихся частиц (осколков деления) и в энергию электромагнитного излучения, возникающего при делении.

6.9. Частицы с нулевой массой

Законы ньютоновской механики не допускают существования частиц с нулевой массой. Такие частицы под действием ничтожно малой силы получали бы бесконечно большое ускорение. Однако существование частиц с $m = 0$ не противоречит законам релятивистской механики.

Согласно формулам

$$\mathbf{p} = \frac{m\mathbf{v}}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \quad \text{и} \quad E = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

---

[10]) Символ $^{235}_{92}\mathrm{U}$ обозначает изотоп урана с массовым числом, равным 235. Ядро атома этого изотопа состоит из 92 протонов и $235-92 = 143$ нейтронов. Символом n обозначается нейтрон.

(см. (6.43) и (6.56)) частица с $m = 0$ может обладать отличными от нуля импульсом и энергией лишь в том случае, если $v = c$ (отношение 0/0 представляет собой неопределенность, которая может равняться конечному числу). Таким образом, частицы с нулевой массой могут существовать, только двигаясь со скоростью c, т. е. со скоростью света в вакууме. Для такой частицы из формулы (6.57) вытекает соотношение

$$p = \frac{E}{c}. \qquad (6.74)$$

К числу частиц с нулевой массой принадлежит световая частица, называемая ф о т о н о м. До недавнего времени полагали, что нулевую массу имеет также элементарная частица, называемая н е й т р и н о. Однако в течение 1975–1980 гг. группа советских ученых, возглавляемая В.А. Любимовым, провела эксперименты, в результате которых пришла к выводу, что масса нейтрино отлична от нуля и, вероятнее всего, имеет значение $6 \cdot 10^{-35}$ кг (1/15 000 массы электрона). Эти данные пока не подтверждены в других экспериментах, в связи с чем не могут считаться окончательными.

Отметим, что, несмотря на отсутствие массы, фотон подвержен действию гравитационного поля (см. об этом в § 7.5).

Энергия фотона определяется формулой

$$E = h\nu, \qquad (6.75)$$

где h — п о с т о я н н а я П л а н к а [11]), ν — частота света. В соответствии с формулой (6.74) фотон обладает импульсом

$$p = \frac{h\nu}{c}. \qquad (6.76)$$

Свет представляет собой поток фотонов. При поглощении света поверхностью некоторого тела этому телу сообщается импульс, которым обладали поглощенные телом фотоны. В результате возникает д а в л е н и е, оказываемое с в е т о м на тело.

[11]) Макс Планк (1858–1947) — немецкий физик, основоположник квантовой теории.

Пусть на единичную площадку поверхности тела падает за секунду и поглощается ею N фотонов, т. е. энергия $W = Nh\nu$. Тогда согласно (6.76) площадке будет сообщаться импульс, равный

$$N(h\nu/c) = W/c.$$

Импульс, сообщаемый в единицу времени, равен силе, действующей на тело. Поэтому тело будет испытывать давление

$$\mathcal{P} = \frac{W}{c}. \tag{6.77}$$

Здесь W — плотность потока энергии, т. е. энергия, падающая на единицу поверхности в единицу времени.

К формуле (6.77) приводит также электромагнитная теория света, созданная Максвеллом[12]) в 60-х годах XIX столетия.

Давление света очень мало. Например, на расстоянии 1 м от источника света силой в миллион кандел давление равно всего лишь примерно 10^{-7} Па. Впервые измерить световое давление удалось Лебедеву[13]) в 1899 г. Результаты измерений оказались в полном согласии с формулой (6.77), а следовательно, и с формулой (6.76).

6.10. Границы применимости ньютоновской механики

Область, в которой ньютоновская механика оказывается справедливой, ограничена релятивистскими и квантовыми эффектами.

Из рассказанного в данной главе следует, что механика Ньютона есть механика малых скоростей, т. е. механика тел, движущихся со скоростями v, много меньшими скорости света в вакууме ($v \ll c$). Скорости движений, с которыми мы имеем дело в повседневной жизни и в технике, настолько малы по сравнению с c, что применительно к этим движениям ньютоновскую механику можно считать практически строгой. Даже при $v = 0,1c$ отличие импульса, вычисленного по формуле (6.43), от ньютоновского импульса составляет всего лишь 0,5 %.

---

[12]) Джеймс Клерк Максвелл (1831–1879) — английский физик, создатель классической электродинамики.

[13]) Петр Николаевич Лебедев (1866–1912) — русский физик.

В мире элементарных частиц скорости, близкие к c, оказываются обычным явлением. Поэтому к этим частицам ньютоновская механика неприменима.

Согласно квантовой механике частицы не могут характеризоваться одновременно точными значениями координаты (например, x) и соответствующей компоненты импульса (т. е. p_x). Предел точности определяется соотношением неопределенностей Гейзенберга[14]):

$$\Delta x \cdot \Delta p_x \geq h/4\pi. \qquad (6.78)$$

Здесь Δx — неопределенность координаты, Δp_x — неопределенность иксовой компоненты импульса, h — постоянная Планка, равная $6,6 \cdot 10^{-34}$ Дж·с. Аналогичные соотношения имеются и для других координат и компонент импульса.

Заменив в (6.78) импульс произведением массы на скорость, получим соотношение

$$\Delta x \cdot \Delta v_x \geq h/(4\pi m). \qquad (6.79)$$

Понятие траектории применимо только к «классической» (т. е. «неквантовой») частице, которой можно приписать в каждый момент времени точные значения координаты и скорости. Из соотношения (6.79) видно, что чем меньше масса частицы, тем менее определенными делаются ее координата и скорость и, следовательно, менее применимым оказывается понятие траектории. Для макроскопических тел (т. е. тел, образованных очень большим количеством атомов или молекул) неопределенности координаты и скорости не превосходят практически достижимой точности измерений этих величин, вследствие чего к таким телам понятие траектории применимо без оговорок. Например, в случае пылинки массой 1 мкг неопределенности координаты $\Delta x = 10^{-12}$ м соответствует неопределенность скорости $\Delta v_x \approx 10^{-13}$ м/с. Обе неопределенности пренебрежимо малы.

Для микрочастиц (электронов, протонов, нейтронов, отдельных атомов и молекул) понятие траектории оказывается в зависимости от условий, в которых происходит движение, либо неприменимым совсем, либо применимым

[14]) Вернер Гейзенберг (1901–1976) — немецкий физик-теоретик, один из создателей квантовой механики.

с ограниченной точностью. Например, для электрона, движущегося в атоме, понятие траектории полностью утрачивает смысл. В то же время движение электронов в электронно-лучевой трубке можно приближенно рассматривать как происходящее по некоторым траекториям.

Таким образом, квантовые эффекты ограничивают применимость классической (ньютоновской и релятивистской) механики к телам малой массы.

Подводя итог, можно сказать, что ньютоновская механика есть механика малых (по сравнению с c) скоростей и больших (по сравнению с массами атомов) масс.

Глава 7
Гравитация

7.1. Закон всемирного тяготения

Гравитацией (или тяготением) называется универсальное взаимодействие (притяжение) между любыми видами материи.

Классическую нерелятивистскую теорию гравитации создал в 1678 г. Ньютон, открывший закон всемирного тяготения. Классическую релятивистскую теорию гравитации создал в 1916 г. Эйнштейн. Он назвал эту теорию общей теорией относительности (понятие о ней дано в § 7.5).

Закон всемирного тяготения гласит, что *материальные точки с массами* m_1 *и* m_2 *притягивают друг друга с силой, прямо пропорциональной массам этих точек и обратно пропорциональной квадрату расстояния* r *между ними:*

$$F = G\frac{m_1 m_2}{r^2}. \qquad (7.1)$$

Коэффициент пропорциональности G называется гравитационной постоянной. Направлены силы взаимного притяжения вдоль соединяющей материальные точки прямой (рис. 7.1). Силу, с которой, например, вторая материальная точка притягивает первую, можно представить в векторной форме:

$$\mathbf{F}_{12} = G\frac{m_1 m_2}{r^2}\mathbf{e}_{12}. \qquad (7.2)$$

m_1 $\mathbf{F}_{12}$ $\mathbf{e}_{12}$ $\mathbf{F}_{21}$ m_2 r

Рис. 7.1

Здесь $\mathbf{e}_{12}$ — единичный вектор (орт), направленный от первой материальной точки ко второй. Сила $\mathbf{F}_{21}$ отличается от $\mathbf{F}_{12}$ знаком: $\mathbf{F}_{21} = -\mathbf{F}_{12}$.

Подчеркнем, что формулы (7.1) и (7.2) справедливы для материальных точек, т. е. тел, размерами которых можно пренебречь по сравнению с расстоянием между ними.

Для определения силы взаимодействия протяженных тел их нужно разбить на элементарные массы Δm, каждую из которых можно было бы принять за материальную

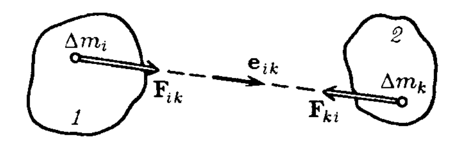


Рис. 7.2

точку (рис. 7.2). Согласно (7.2) i-я элементарная масса тела *1* притягивается к k-й элементарной массе тела *2* с силой

$$\mathbf{F}_{ik} = G\frac{\Delta m_i \Delta m_k}{r_{ik}^2}\mathbf{e}_{ik}, \qquad (7.3)$$

где r_{ik} — расстояние между элементарными массами.

Просуммировав (7.3) по всем значениям индекса k, получим силу, действующую со стороны тела *2* на принадлежащую телу *1* элементарную массу Δm_i:

$$\mathbf{F}_{i2} = \sum_k G\frac{\Delta m_i \Delta m_k}{r_{ik}^2}\mathbf{e}_{ik}. \qquad (7.4)$$

Наконец, просуммировав (7.4) по всем значениям индекса i, т. е. сложив силы, приложенные ко всем элементарным массам первого тела, получим силу, с которой тело *2* действует на тело *1*:

$$\mathbf{F}_{12} = \sum_i \sum_k G\frac{\Delta m_i \Delta m_k}{r_{ik}^2}\mathbf{e}_{ik}. \qquad (7.5)$$

Суммирование производится по всем значениям индексов i и k. Следовательно, если тело *1* разбить на N_1, а тело *2* — на N_2 элементарных масс, то сумма (7.5) будет содержать $N_1 N_2$ слагаемых.

Практически суммирование (7.5) сводится к интегрированию и является, вообще говоря, очень сложной математической задачей. Если взаимодействующие тела однородны и имеют правильную форму, вычисления сильно упрощаются.

Найдем в качестве примера силу, с которой притягивают друг друга два тонких стержня, расположенных вдоль одной прямой (рис. 7.3). В данном случае все элементарные силы коллинеарны. Поэтому сложение сил можно заменить сложением их модулей и воспользоваться формулой (7.1). Из рис. 7.3 следует, что модуль силы, с ко-

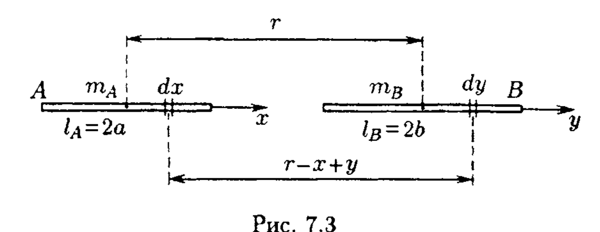


Рис. 7.3

торой элемент dx стержня A взаимодействует с элементом dy стержня B, равен

$$dF = G\frac{dm_A dm_B}{(r-x+y)^2} = G\frac{(m_A/2a)\,dx(m_B/2b)\,dy}{(r-x+y)^2}$$

(m_A — масса, а $2a$ — длина стержня A, m_B — масса, а $2b$ — длина стержня B, r — расстояние между центрами масс стержней). Проинтегрировав это выражение по x в пределах от $-a$ до $+a$ и по y в пределах от $-b$ до $+b$, получим модуль силы взаимодействия стержней:

$$F_{AB} = \int dF = G\frac{m_A m_B}{4ab}\int\limits_{-a}^{+a}\int\limits_{-b}^{+b}\frac{dx\,dy}{(r-x+y)^2}.$$

Не приводя вычислений [1]), дадим окончательный результат:

$$F_{AB} = G\frac{m_A m_B}{4ab}\ln\frac{r^2-(b-a)^2}{r^2-(b+a)^2}. \qquad (7.6)$$

Воспользовавшись формулой $\ln(1-\alpha) \approx -\alpha$, справедливой для $\alpha \ll 1$, можно показать, что в случае, когда величины a и b много меньше r ($a \ll r$, $b \ll r$), т. е. стержни

[1]) Для тех, кто захочет проделать вычисления, укажем, что сначала нужно проинтегрировать выражение для F_{AB} по одной из переменных, скажем по x, считая другую переменную постоянной, затем проинтегрировать полученное выражение по y.

можно считать материальными точками, выражение (7.6) переходит в

$$F_{AB} = G\frac{m_A m_B}{r^2},$$

как и должно быть для материальных точек.

Если длина стержней одинакова ($b = a$), а расстояние между их центрами равно удвоенной длине стержня ($r = 4a$), формула (7.6) упрощается следующим образом:

$$F_{AB} = G\frac{m_A m_B}{4a^2}\ln\frac{4}{3} = G\frac{m_A m_B}{r^2}\cdot 4\ln\frac{4}{3} = G\frac{m_A m_B}{r^2}\cdot 1,15. \qquad (7.7)$$

Иногда можно встретить утверждение, что формула (7.1) справедлива для протяженных тел любой формы, причем под r следует понимать расстояние между центрами масс тел. Из рассмотренных примеров (формулы (7.6) и (7.7)) видно, что это утверждение ошибочно. Только если взаимодействующие тела представляют собой однородные[2]) шары или шаровые оболочки, вычисления по формуле (7.5) (с заменой суммирования интегрированием) приводят к формуле (7.2), где r — расстояние между центрами шаров (или оболочек). Следовательно, однородные шары взаимодействуют как материальные точки, имеющие массы шаров и помещенные в их центрах. Если одно из тел представляет собой однородный шар, а другое тело можно рассматривать как материальную точку (например, Земля и камень, находящийся на произвольном расстоянии от земной поверхности), то их взаимодействие описывается формулой (7.2), в которой под r нужно понимать расстояние от центра шара до материальной точки (это утверждение будет доказано в следующем параграфе).

Числовое значение гравитационной постоянной было определено путем измерения силы, с которой притягиваются друг к другу тела известной массы. При таких измерениях возникают большие трудности, так как для тел, массы которых могут быть непосредственно измерены, сила притяжения оказывается крайне малой. Так, напри-

---

[2]) Достаточно, чтобы распределение массы в пределах каждого шара обладало центральной симметрией, т. е. чтобы плотность была функцией только расстояния от центра шара.

мер, два тела с массой 100 кг каждое, находящиеся на расстоянии 1 м друг от друга, взаимодействуют с силой порядка 10^{-6} Н, т. е. порядка 10^{-4} гс.

Первой успешной попыткой определения G были измерения, осуществленные Кавендишем[3]) в 1798 г. Он применил для измерения сил весьма чувствительный метод крутильных весов (рис. 7.4). Два свинцовых шара m (с массой 0,729 кг каждый), прикрепленных к концам легкого коромысла, помещались вблизи симметрично расположенных шаров M (с массой по 158 кг). Коромысло подвешивалось на упругой нити, по закручиванию которой можно измерять силу притяжения шаров друг к другу. Большие шары устанавливались на подставке, поворотом которой можно изменять расстояние между большими и малыми шарами.

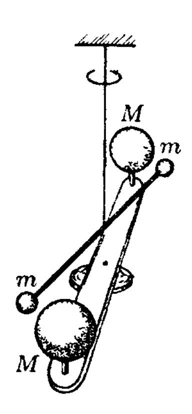


Рис. 7.4

Наиболее точным из определенных разными способами значений считается

$$G = 6,672 \cdot 10^{-11}\,\text{Н} \cdot \text{м}^2/\text{кг}. \qquad (7.8)$$

Если в (7.1) подставить m_1, m_2 и r, равные единице, то сила окажется численно равной G. Таким образом, два шара с массой 1 кг каждый, центры которых отстоят друг от друга на 1 м, притягиваются взаимно с силой, равной $6,672 \cdot 10^{-11}$ Н.

7.2. Гравитационное поле

Гравитационное взаимодействие осуществляется посредством гравитационного поля Всякое тело изменяет свойства окружающего его пространства — создает в нем *гравитационное поле*. Это поле проявляет себя в том, что на помещенное в него другое тело действует сила.

Для характеристики гравитационного поля вводится векторная величина

$$\mathbf{g} = \frac{\mathbf{F}}{m}, \qquad (7.9)$$

---

[3]) Генри Кавендиш (1731–1810) — английский физик и химик.

где $\mathbf{F}$ — сила, действующая в данной точке поля на тело массы m. Эта величина называется напряженностью гравитационного поля. Чем меньше размеры тела (и соответственно меньше его масса), тем точнее величина (7.9) будет характеризовать поле именно «в данной точке». Размерность напряженности гравитационного поля совпадает с размерностью ускорения.

Если пренебречь обусловленной вращением Земли центробежной силой инерции, то напряженность гравитационного поля вблизи поверхности Земли можно считать равной ускорению свободного падения тел.

Из формулы (7.2) легко прийти к выводу, что напряженность поля, создаваемого материальной точкой массы m, равна

$$\mathbf{g} = -G\frac{m}{r^2}\mathbf{e}_r, \tag{7.10}$$

где $\mathbf{e}_r$ — орт радиуса-вектора, проведенного из материальной точки в данную точку поля, r — модуль этого радиуса-вектора.

Пусть гравитационное поле создается закрепленной в начале координат материальной точкой массы m. Тогда на материальную точку массы m', находящуюся в точке с радиусом-вектором $\mathbf{r}$, будет действовать сила

$$\mathbf{F} = \mathbf{g}m' = -G\frac{mm'}{r^2}\mathbf{e}_r \tag{7.11}$$

(ср. с (3.120)). В § 3.13 было показано, что потенциальная энергия точки m' определяется в этом случае выражением

$$U = -G\frac{mm'}{r} \tag{7.12}$$

(потенциальная энергия при $r = \infty$ принята равной нулю). Выражение (7.12) можно трактовать также как взаимную потенциальную энергию материальных точек m и m'.

Из (7.12) видно, что каждой точке поля, создаваемого материальной точкой m, соответствует определенное значение потенциальной энергии, которой обладает в этом поле материальная точка m'. Поэтому поле можно характеризовать потенциальной энергией, которой обладает в данном месте материальная точка с $m' = 1$. Величину

$$\varphi = \frac{U}{m'} \tag{7.13}$$

называют **потенциалом гравитационного поля**. В этой формуле U есть потенциальная энергия, которой обладает материальная точка массы m' в данной точке поля.

Зная потенциал поля, можно вычислить работу, совершаемую над частицей m' силами поля при перемещении ее из положения *1* в положение *2*. Согласно формуле (3.26) эта работа равна

$$A_{12} = U_1 - U_2 = m'(\varphi_1 - \varphi_2).$$

Согласно (7.9) и (7.13) сила, действующая на частицу m', равна

$$\mathbf{F} = m'\mathbf{g},$$

а потенциальная энергия этой частицы равна $U = m'\varphi$. В соответствии с формулой (3.32)

$$\mathbf{F} = -\nabla U,$$

т. е. $m'\mathbf{g} = -\nabla(m'\varphi)$. Вынеся из-под знака градиента константу m' и сократив затем на эту константу, придем к соотношению между напряженностью и потенциалом гравитационного поля:

$$\mathbf{g} = -\nabla\varphi. \qquad (7.14)$$

Таким образом, напряженность гравитационного поля равна градиенту потенциала, взятому с обратным знаком.

Потенциальная энергия тела, находящегося вблизи поверхности Земли, равна $U = mgh$ [4]). Разделив U на m, получим для потенциала гравитационного поля вблизи поверхности Земли формулу

$$\varphi = gh \qquad (7.15)$$

(g — модуль ускорения свободного падения).

Найдем выражение для взаимной потенциальной энергии однородного шарового слоя и материальной точки массы m, причем рассмотрим два случая, отвечающие нахождению точки вне и внутри слоя. Начнем со случая,

[4]) Это выражение, казалось бы, не согласуется с выражением (7.12). Суть дела в том, что выражение (7.12) годится для любых значений r, больших радиуса Земли R, и нормировано так, чтобы U обращалась в нуль на бесконечности. Выражение же $U = mgh$ справедливо только для таких значений h, которые удовлетворяют условию $h \ll R$, и нормировано так, чтобы U обращалась в нуль на поверхности Земли.

когда m находится вне слоя (рис. 7.5 a). Выделим из слоя кольцо, края которого отвечают значениям угла ϑ и $\vartheta+d\vartheta$. Радиус этого кольца равен $a\sin\vartheta$, а ширина $a\,d\vartheta$ (a — радиус слоя). Следовательно, площадь кольца определяется выражением $2\pi a^2\sin\vartheta\,d\vartheta$. Если толщина слоя da, а

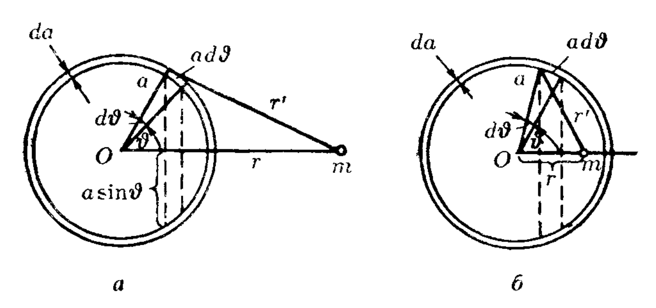


Рис. 7.5

плотность ρ, то масса кольца равна $2\pi\rho a^2\,da\sin\vartheta\,d\vartheta$. Все точки кольца находятся от m на одинаковом расстоянии r'. Поэтому согласно (7.12) взаимная потенциальная энергия кольца и массы m определяется выражением

$$dU_{\text{к}} = -G\frac{2\pi\rho a^2\,da\sin\vartheta\,d\vartheta\cdot m}{r'}. \qquad (7.16)$$

Чтобы получить потенциальную энергию всего шарового слоя и массы m, нужно проинтегрировать выражение (7.16) по углу ϑ в пределах от 0 до π. При этом переменная r' изменяется в пределах от $r-a$ до $r+a$ (r — расстояние от центра слоя O до m). Выражение (7.16) содержит две связанные друг с другом переменные: ϑ и r'. Прежде чем приступить к интегрированию, нужно исключить одну из этих переменных. Интегрирование упрощается, если исключить переменную ϑ. Связь между ϑ и r' можно получить, воспользовавшись теоремой косинусов. Из рис. 7.5 видно, что

$$r'^2 = a^2 + r^2 - 2ar\cos\vartheta.$$

Продифференцировав это соотношение, получим, что

$$2r'\,dr' = 2ar\sin\vartheta\,d\vartheta.$$

Отсюда $\sin\vartheta\,d\vartheta = (r'/ar)\,dr'$. Произведя в (7.16) такую замену, получим

$$dU_{\text{к}} = -G\frac{2\pi\rho a\,da\cdot m\cdot dr'}{r}.$$

Интегрирование по r' в пределах от $r'_1 = r-a$ до $r'_2 = r+a$ дает

$$dU_{\text{сл}} = -G\frac{2\pi\rho a\,da\cdot m}{r}\int\limits_{r-a}^{r+a} dr' = -G\frac{\rho\cdot 4\pi a^2\,da\cdot m}{r}. \tag{7.17}$$

Выражение $4\pi a^2\,da$ дает объем слоя, а $\rho\cdot 4\pi a^2\,da$ — его массу dM. Таким образом, взаимная потенциальная энергия шарового слоя и массы m равна

$$dU_{\text{сл}} = -G\frac{dM\cdot m}{r}, \tag{7.18}$$

где r — расстояние от центра слоя до m.

Для случая, когда масса m помещается внутри слоя (см. рис. 7.5 *б*), все выкладки остаются теми же. Иными будут лишь пределы интегрирования в (7.17), так как r' меняется в этом случае от значения $r'_1 = a-r$ до $r'_2 = a+r$. Следовательно,

$$dU'_{\text{сл}} = -G\frac{2\pi\rho a\,da\cdot m}{r}\int\limits_{a-r}^{a+r} dr' = -G\rho\cdot 4\pi a\,da\cdot m =$$
$$= -G\frac{\rho\cdot 4\pi a^2\,da\cdot m}{a} = -G\frac{dM\cdot m}{a}. \tag{7.19}$$

Таким образом, в этом случае потенциальная энергия одинакова для всех r и равна значению (7.18), получающемуся для $r = a$.

Выражение (7.18) можно трактовать как потенциальную энергию частицы m в поле, создаваемом шаровым слоем массы dM. Взятая с обратным знаком производная от этой энергии по r равна проекции на направление r силы, действующей на частицу:

$$dF_r = -\frac{\partial U}{\partial r} = -G\frac{dM\cdot m}{r^2}. \tag{7.20}$$

Знак минус указывает на то, что сила направлена в сторону убывания r, т. е. к центру слоя.

Из формулы (7.20) следует, что шаровой слой действует на частицу с такой силой, с какой действовала бы помещенная в центр слоя материальная точка с массой, равной массе слоя.

Выражение (7.19) не зависит от координат частицы. Поэтому градиент этого выражения равен нулю для всех $r < a$. Таким образом, частица, находящаяся внутри слоя, не подвержена действию никакой силы Каждый элемент слоя действует, конечно, на частицу с некоторой силой, но сумма сил, действующих со стороны всех элементов слоя, равна нулю.

Теперь рассмотрим систему, состоящую из однородного шара массы M и материальной точки (частицы) массы m. Разобьем шар на слои массы dM. Каждый слой действует на частицу с силой, определяемой формулой (7.20). Просуммировав это выражение по всем слоям, получим силу, с которой шар действует на частицу:

$$F_r = \int dF_r = -\int G\frac{dM \cdot m}{r^2} = -G\frac{Mm}{r^2}. \qquad (7.21)$$

Действие шара на частицу эквивалентно действию помещенной в центр шара материальной точки с массой, равной массе шара (см. § 7.2).

Если взять шар со сферической полостью внутри, то на частицу, находящуюся в этой полости, не будет действовать никакая сила.

Просуммировав по всем слоям сплошного или полого шара выражение (7.18), получим взаимную потенциальную энергию частицы и шара:

$$U = -G\frac{Mm}{r}. \qquad (7.22)$$

Здесь M — масса шара, m — масса частицы, r — расстояние от частицы до центра шара.

Из (7.21) и (7.22) вытекает, что гравитационное поле, создаваемое однородным шаром, эквивалентно (вне шара) полю, создаваемому материальной точкой с той же массой, находящейся в центре шара.

Рассмотрим два однородных шара с массами M_1 и M_2. Второй шар испытывает со стороны первого такое же действие, какое оказывала бы материальная точка массы M_1, находящаяся в центре первого шара. По третьему закону Ньютона соответствующая сила равна по модулю

силе, с которой второй шар действовал бы на материальную точку M_1. Согласно (7.21) модуль этой силы равен GM_1M_2/r^2. Таким образом, мы доказали, что однородные шары взаимодействуют как материальные точки, помещающиеся в их центрах.

7.3. Космические скорости

Для того чтобы тело стало спутником Земли, т. е. двигалось по круговой околоземной орбите, ему нужно сообщить скорость v_1, значение которой определяется вторым законом Ньютона. Положив радиус орбиты равным радиусу Земли R, напишем уравнение

$$m\frac{v_1^2}{R} = mg.$$

Здесь m — масса тела, v_1^2/R — ускорение, mg — сила тяжести, действующая на тело. Из написанного уравнения следует, что

$$v_1 = \sqrt{gR}. \tag{7.23}$$

Скорость (7.23) называется **первой космической скоростью**. Радиус Земли $R = 6,37 \cdot 10^6$ м, ускорение $g = 9,81$ м/с^2. Следовательно,

$$v_1 = \sqrt{9,81 \cdot 6,37 \cdot 10^6}\,\text{м/с} = 7,9 \cdot 10^3\,\text{м/с} \approx 8\,\text{км/с}.$$

Скорость v_2, которую нужно сообщить телу при запуске с Земли для того, чтобы оно вышло из сферы земного притяжения (т. е. удалилось на такое расстояние, при котором притяжение к Земле становится пренебрежимо малым), называется **второй космической скоростью**. Для нахождения v_2 воспользуемся законом сохранения энергии (сопротивлением воздуха при прохождении тела через атмосферу Земли пренебрегаем). В момент запуска полная энергия тела равна

$$E = \frac{mv_2^2}{2} - G\frac{Mm}{R} \tag{7.24}$$

(M — масса Земли; см. формулу (7.12); напомним, что выражение (7.12) нормировано так, чтобы потенциальная энергия обращалась в нуль на бесконечности). При удале-

нии тела «на бесконечность» полная энергия становится равной нулю (мы ищем минимальное значение v_2, поэтому считаем, что скорость тела на бесконечности равна нулю). Приравняв выражение (7.24) нулю, получим для v_2 значение

$$v_2 = \sqrt{2GM/R}. \qquad (7.25)$$

Если пренебречь различием между силой тяжести mg и силой гравитационного притяжения тела к Земле, можно написать равенство

$$mg = G\frac{Mm}{R^2}.$$

Отсюда $GM/R = gR$. Следовательно, выражение (7.25) можно представить в виде

$$v_2 = \sqrt{2gR}. \qquad (7.26)$$

Приняв во внимание формулу (7.23), получим, что

$$v_2 = v_1\sqrt{2} = 11,2\,\text{км/с} \approx 11\,\text{км/с}.$$

Отметим, что значение v_2 не зависит от направления, в котором запускается тело с Земли. От этого направления зависит лишь вид траектории, по которой тело удаляется от Земли.

Скорость v_3, которую нужно сообщить телу при запуске с Земли для того, чтобы оно покинуло пределы Солнечной системы, называется *третьей космической скоростью*.

Подставив в формулу (7.25) вместо M массу Солнца ($1.97\cdot 10^{30}$ кг) и вместо R — радиус земной орбиты ($1,50\times\times 10^{11}$ м; в момент старта с Земли тело находится на таком расстоянии от Солнца), получим значение скорости, равное

$$\sqrt{2\cdot 6,67\cdot 10^{-11}\cdot 1,97\cdot 10^{30}/1,50\cdot 10^{11}}\,\text{м/с} = \\ = 4,2\cdot 10^4\,\text{м/с} = 42\,\text{км/с}.$$

Такова была бы третья космическая скорость, если бы Земля в момент запуска была неподвижна и не притягивала бы тело к себе. Но Земля сама движется относительно Солнца со скоростью 30 км/с. Поэтому при за-

пуске в направлении орбитального движения Земли скорость 42 км/с относительно Солнца достигается при скорости относительно Земли, равной 42 – 30 = 12 (км/с), а при запуске в противоположном направлении 42 + 30 = = 72 (км/с). Таковы были бы минимальное и максимальное значения v_3, если бы не было силы притяжения тела к Земле. С учетом этого притяжения для третьей космической скорости получаются значения от 17 до 73 км/с.

Впервые запуски тел с космическими скоростями были осуществлены в СССР. 4 октября 1957 г. был запущен искусственный спутник Земли. 2 января 1959 г. была запущена космическая ракета, которая вышла из сферы земного притяжения и стала первой искусственной планетой Солнечной системы. 12 апреля 1961 г. был осуществлен запуск человека в космическое пространство. Первый советский космонавт Юрий Алексеевич Гагарин совершил полет вокруг Земли и благополучно приземлился.

7.4. Принцип эквивалентности

Масса фигурирует в двух различных законах: во втором законе Ньютона и в законе всемирного тяготения. В первом случае она характеризует инертные свойства тела, во втором — гравитационные свойства, т. е. способность тел притягивать друг друга. В связи с этим возникает вопрос, не следует ли различать инертную массу m_{in} и массу гравитационную m_g.

Ответ на этот вопрос может дать только опыт. Рассмотрим в гелиоцентрической системе отсчета свободное падение тел. Всякое тело вблизи поверхности Земли испытывает силу притяжения к Земле, которая согласно (7.21) равна

$$F = G\frac{m_g M_З}{R_З^2}$$

(m_g — гравитационная масса данного тела, $M_З$ — гравитационная масса Земли. $R_З$ — радиус земного шара). Под действием этой силы тело приобретает ускорение w (но не g; см. § 4.2), которое должно быть равно силе F, деленной на инертную массу тела m_{in}:

$$w = \frac{F}{m_{\text{in}}} = G\frac{M_З}{R_З^2}\frac{m_g}{m_{\text{in}}}. \tag{7.27}$$

Опыт показывает, что ускорение w для всех тел одинаково (в § 4.2 показано, что из одинаковости g вытекает одинаковость w). Множитель $GM_З/R_З^2$ также одинаков для всех тел. Следовательно, и отношение m_g/m_{in} оказывается для всех тел одним и тем же. К такому же результату приводят и все другие опыты, в которых могло бы проявиться различие между инертной и гравитационной массами.

Из числа упомянутых опытов расскажем об опыте Этвеша[5]), начатом в 1887 г. и продолжавшемся более 25 лет. В его основе лежит то обстоятельство, что на тело, покоящееся вблизи поверхности Земли, действуют, кроме реакции опоры, гравитационная сила $\mathbf{F}_g$, направленная к центру Земли, а также центробежная сила инерции $\mathbf{F}_{цб}$, направленная перпендикулярно к оси вращения Земли (рис. 7.6; на этом рисунке не соблюден масштаб — мо-

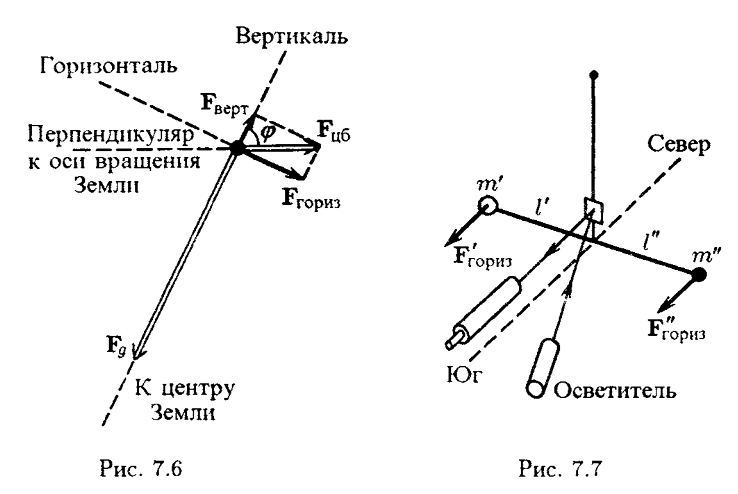


Рис. 7.6

Рис. 7.7

дуль центробежной силы на два порядка меньше модуля гравитационной силы, см. § 4.2). Гравитационная сила пропорциональна гравитационной массе тела m_g:

$$\mathbf{F}_g = m_g \mathbf{g}$$

($\mathbf{g}$ — напряженность гравитационного поля). Центробежная сила инерции пропорциональна инертной массе m_{in}.

[5]) Роланд Этвеш (1848–1919) — венгерский физик.

Согласно формуле (4.7) ее модуль определяется выражением

$$F_{\text{цб}} = m_{\text{in}}\omega^2 R_3 \cos\varphi$$

(φ — широта местности). Из рис. 7.6 следует, что модуль вертикальной составляющей центробежной силы инерции равен

$$F_{\text{верт}} = F_{\text{цб}} \cos\varphi = m_{\text{in}}\omega^2 R_3 \cos^2\varphi = A m_{\text{in}}.$$

Мы ввели обозначение $A = \omega^2 R_3 \cos^2\varphi$. Опыт Этвеша производился на широте $\varphi = 45°$. В этом случае коэффициент A примерно в 100 раз меньше g.

Модуль горизонтальной составляющей силы $F_{\text{цб}}$ равен

$$F_{\text{гориз}} = F_{\text{цб}} \sin\varphi = m_{\text{in}}\omega^2 R_3 \cos\varphi \sin\varphi = B m_{\text{in}}$$

(для $\varphi = 45°$ значения коэффициентов A и B совпадают).

Этвеш подвесил на упругой нити стержень с укрепленными на его концах телами по возможности равной массы (рис. 7.7). Тела брались из разных материалов. К нижней части нити прикреплялось зеркальце. Луч, вышедший из осветителя и отраженный от зеркальца, попадал на перекрестье зрительной трубы. Плечи l' и l'' подбирались так, чтобы стержень находился в равновесии в вертикальной плоскости. Условие равновесия выглядит следующим образом:

$$(m'_g g - m'_{\text{in}} A) l' = (m''_g g - m''_{\text{in}} A) l''. \qquad (7.28)$$

Прибор располагался так, чтобы стержень был перпендикулярен к плоскости меридиана. В этом случае горизонтальные составляющие центробежной силы инерции создают закручивающий момент, равный

$$N = m'_{\text{in}} B l' - m''_{\text{in}} B l''. \qquad (7.29)$$

Исключив из уравнений (7.28) и (7.29) плечо l'', можно после несложных преобразований прийти к формуле

$$N = m'_{\text{in}} B l' \left[1 - \frac{(m'_g/m'_{\text{in}})g - A}{(m''_g/m''_{\text{in}})g - A} \right].$$

Из этой формулы видно, что в том случае, когда отношение гравитационной и инертной масс для обоих тел одинаково, момент, закручивающий нить, должен быть равен нулю. Если же отношение m_g/m_{in} для первого и

второго тел неодинаково, закручивающий момент отличен от нуля. В этом случае при повороте всего прибора на 180° закручивающий момент изменил бы знак на обратный и световой зайчик сместился бы из перекрестья зрительной трубы (рис. 7.8). При сравнении восьми различных тел (в том числе и деревянного) с платиновым телом, принятым за эталон, Этвеш не обнаружил закручивания нити. Это дало ему основание утверждать, что отношение m_g/m_{in} для этих тел одинаково с относительной погрешностью 10^{-8}.

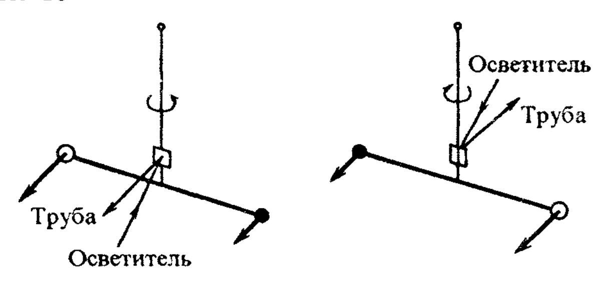


Рис. 7.8

В 1961–1964 гг. Дикке[6]) усовершенствовал метод Этвеша, использовав для создания закручивающего момента гравитационное поле Солнца и центробежную силу инерции, обусловленную орбитальным движением Земли. В результате своих измерений Дикке пришел к выводу, что отношение m_g/m_{in} одинаково для исследованных тел с относительной погрешностью 10^{-11}. Наконец, в 1971 г. В.Б. Брагинский и В.И. Панов получили постоянство указанного отношения с относительной погрешностью 10^{-12}.

Итак, вся совокупность опытных фактов указывает на то, что *инертная и гравитационная массы всех тел строго пропорциональны друг другу.* Это означает, что при надлежащем выборе единиц гравитационная и инертная массы становятся тождественными, поэтому в физике говорят просто о массе. Тождественность гравитационной и инертной масс положена Эйнштейном в основу общей теории относительности.

В § 4.1 мы уже отмечали, что силы инерции аналогичны силам тяготения — и те и другие пропорциональны

[6]) Роберт Дикке (р. в 1916 г.) — американский физик.

массе тела, на которое они действуют. Там же было указано, что, находясь внутри закрытой кабины, никакими опытами нельзя установить, чем вызвано действие на тело силы $m\mathbf{g}$: тем ли, что кабина движется с ускорением $-\mathbf{g}$, либо тем, что неподвижная кабина находится вблизи поверхности Земли. Это утверждение составляет содержание так называемого принципа эквивалентности.

Тождественность инертной и гравитационной масс является следствием эквивалентности сил инерции и сил тяготения.

Отметим, что с самого начала массу в (7.1) мы полагали совпадающей с инертной массой тел, вследствие чего числовое значение G нами было определено в предположении, что $m_g = m_{in}$. Поэтому (7.27) можно записать в виде

$$\omega = G\frac{M_З}{R_З^2}. \tag{7.30}$$

Последнее соотношение позволяет определить массу Земли $M_З$. Подстановка в него измеренных значений w, $R_З$ и G дает для массы Земли значение $5,98 \cdot 10^{24}$ кг.

Далее, зная радиус земной орбиты R_{op} и время полного обращения Земли вокруг Солнца T, можно найти массу Солнца M_C. Ускорение Земли, равное $\omega^2 R_{op}$ ($\omega = 2\pi/T$), обусловливается силой притяжения Земли к Солнцу. Следовательно,

$$M_З\omega^2 R_{op} = G\frac{M_З M_C}{R_{op}^2},$$

откуда может быть вычислена масса Солнца.

Подобным же образом были определены массы других небесных тел.

7.5. Понятие об общей теории относительности

Созданная А. Эйнштейном в 1916 г. общая теория относительности (ОТО) представляет собой классическую (неквантовую) релятивистскую теорию гравитации. Некоторые физики склонны считать ОТО самой красивой из существующих физических теорий.

В основу ОТО Эйнштейн положил принцип эквивалентности (см. §7.4), согласно которому свойства движения в неинерциальной системе отсчета те же, что

и в инерциальной системе при наличии гравитационного поля. Таким образом, неинерциальная система отсчета эквивалентна некоторому гравитационному полю.

Из принципа эквивалентности вытекает, что все явления, которые обусловлены неинерциальностью системы отсчета, могут наблюдаться в инерциальной системе в результате действия сил тяготения.

В качестве примера рассмотрим движение в вакууме световой частицы — фотона (совокупность таких частиц, летящих «бок о бок», образует световой луч). Из оптики известно, что в вакууме в отсутствие каких-либо полей световые лучи прямолинейны. Следовательно, в инерциальной системе отсчета в отсутствие гравитационного поля фотон летит со скоростью c по прямолинейной траектории. Примем эту траекторию за ось x (рис. 7.9). В неинерциальной системе отсчета, движущейся с ускорением $-\mathbf{w}$ параллельно оси y, фотон будет обладать ускорением $\mathbf{w}$, перпендикулярным к оси x. Поэтому относительно неинерциальной системы отсчета, одновременно с движением вдоль оси x со скоростью c, фотон будет двигаться равноускоренно вдоль оси y. За время t фотон пройдет вдоль оси x путь $x = ct$ и вдоль оси y путь $y = wt^2/2$. Исключив из выражений для x и y время t, получим уравнение траектории фотона, т. е. уравнение луча в неинерциальной системе отсчета:

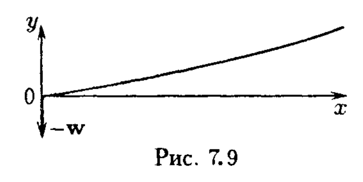


Рис. 7.9

$$y = \frac{w}{2c^2}x^2.$$

Таким образом, световой луч, прямолинейный в инерциальной системе отсчета, в неинерциальной системе отсчета искривляется и приобретает форму параболы.

Согласно принципу эквивалентности такое же искривление луча должно наблюдаться в инерциальной системе отсчета под действием перпендикулярного к лучу гравитационного поля. Отсюда заключаем, что световые частицы — фотоны подвержены действию сил тяготения.

В § 6.3 мы отмечали, что пространство, в котором квадрат расстояния dl между двумя точками определяется выражением

$$dl^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2,$$

называется евклидовым. В таком пространстве справедлива евклидова геометрия, в которой постулируется, что линии, вдоль которых расстояние между двумя точками минимально, являются прямыми (образно можно сказать, что прямая есть кратчайшее расстояние между двумя точками). В евклидовой геометрии сумма углов треугольника равна π, а отношение длины окружности к радиусу равно 2π. Пространство с такими свойствами называется плоским.

Псевдоевклидово четырехмерное пространство-время в отсутствие гравитационных полей также является плоским. При переходе в неинерциальную систему отсчета пространство-время оказывается искривленным.

Рассмотрим понятие кривизны пространства на примере двумерных пространств. В случае двумерного плоского пространства множество принадлежащих ему точек образует плоскость и кривизна пространства равна нулю. Простейшим двумерным пространством с отличной от нуля кривизной является сфера (рис. 7.10). Кривизна этого пространства растет с уменьшением R и принимается равной $1/R^2$. Кратчайшим расстоянием между точками *1* и *2*

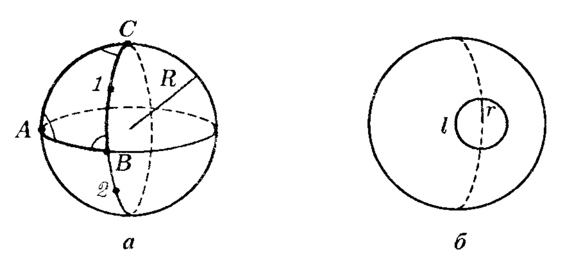


Рис. 7.10

в таком пространстве является не прямая (точки которой не принадлежат данному пространству), а дуга большой окружности (т. е. окружности, которая делит сферу на две равные части).

Линии, вдоль которых расстояние между двумя точками является минимальным, называются геодезическими. В случае сферы геодезическими линиями являются большие окружности.

Геометрия сферического пространства неевклидова. Это, в частности, проявляется в том, что сумма углов треугольника превышает π (рис. 7.10 *а*), а длина окружности

l меньше $2\pi r$ (рис. 7.10 *б*). Действительно, все углы при вершинах треугольника ABC на рис. 7.10 *а* равны $\pi/2$; следовательно, сумма углов равна $3\pi/2$. Из рис. 7.10 *б* видно, что равный отрезку дуги большой окружности радиус r окружности, построенной в двумерном сферическом пространстве, превышает радиус окружности на плоскости.

Мы выяснили неевклидовость двумерного сферического пространства, рассматривая его «со стороны» из трехмерного пространства. Однако «обитатели» сферы могли бы установить неевклидовость пространства, в котором они «живут», не выходя за его пределы. Для этого им достаточно было бы обнаружить, что сумма углов треугольника отлична от π, а длина окружности не равна $2\pi r$.

Аналогично обстоит дело в случае трехмерного пространства, в котором мы живем. Для того чтобы определить метрику этого пространства, нет необходимости рассматриваеть его со стороны из четырехмерного пространства (что невозможно). Достаточно, скажем, определить сумму углов треугольника и отношение длины окружности к ее радиусу. Следует иметь в виду, что вблизи поверхности Земли неевклидовость пространства крайне мала и не может наблюдаться непосредственно.

Вся совокупность экспериментальных данных указывает на то, что пространство, в котором мы живем, является практически плоским (т. е. евклидовым) лишь в случае слабых гравитационных полей (к числу которых относится поле Земли). Однако вблизи больших гравитирующих масс это пространство искривляется и становится неевклидовым.

Обратимся к четырехмерному пространству-времени. При наличии гравитационного поля оно оказывается искривленным. Кратчайшим расстоянием между двумя мировыми точками в пространстве-времени является геодезическая линия.

Согласно Эйнштейну никаких специальных гравитационных сил не существует и всякое тело всегда движется в пространстве-времени «свободно» вдоль геодезических линий. При этом в обычном трехмерном пространстве тело движется, вообще говоря, вдоль криволинейных траекторий с переменной скоростью, т. е. так, как оно двигалось бы под действием некоторой силы. Например, Земля движется вокруг Солнца по искривленной траектории (орбите) не потому, что какие-то силы препятствуют ее пря-

молинейному движению, а потому, что она беспрепятственно скользит в искривленном пространстве-времени вдоль геодезической линии в окрестности Солнца. Таким образом, тяготение есть свойство самого пространства-времени, а не некое воздействие на его фоне.

Геометрия искривленного пространства-времени является неевклидовой, в чем мы убедились на примере двумерного сферического пространства. Первую неевклидову геометрию построил в 1826 г. Н.И. Лобачевский [7]). Затем появились неевклидовы геометрии Я. Больяй [8]), К. Гаусса и, наконец, Б. Римана [9]). Все они различаются аксиомами, исходя из которых построены. Эйнштейн положил в основу ОТО риманову геометрию.

Эйнштейн вывел *уравнения гравитационного поля*, которые связывают величину, характеризующую кривизну пространства-времени (тензор кривизны), с величиной, характеризующей распределение источников тяготения (тензором энергии-импульса). Уравнения Эйнштейна описывают, как заданное распределение энергии и импульса (в том числе и энергии покоя тел) искажает структуру пространства-времени в окрестности этого распределения. Эти уравнения исключительно сложны. Известно лишь несколько их точных решений.

В 1916 г. К. Шварцшильдом [10]) было получено решение уравнений Эйнштейна для случая пространства вокруг сферического тела. Если пренебречь гравитационными полями планет, условие этой задачи соответствует модели Солнечной системы.

Общая теория относительности дала, в частности, объяснение трех эффектов, наблюдаемых экспериментально.

Вращение перигелия планет. Согласно решению Шварцшильда планеты движутся по эллиптическим орбитам, которые медленно поворачиваются (прецессируют) в своей плоскости. Это приводит к вращению ближайшей к Солнцу точки орбиты, называемой перигелием. Эффект прецессии крайне мал. Сильнее всего он выражен для самой близкой к Солнцу планеты — Меркурия. Поворот оси эллиптической орбиты этой планеты составляет всего 43 угло-

---

[7]) Николай Иванович Лобачевский (1792–1856) — русский математик.

[8]) Янош Больяй (1802–1860) — венгерский математик.

[9]) Бернхард Риман (1826–1866) — немецкий математик.

[10]) Карл Шварцшильд (1873–1916) — немецкий астроном и физик.

вые секунды в столетие (полный оборот осуществляется за три миллиона лет). Для Земли прецессия вызывает поворот орбиты на 4 угловые секунды в столетие. Прецессия орбит планет подтверждена астрономическими наблюдениями, причем теоретические и наблюденные значения совпадают с очень большой точностью.

Искривление световых лучей. Одним из подтверждений ОТО является искривление лучей под действием гравитационного поля. На рис. 7.11 буквой A обозначено действительное положение звезды, а буквой B — ее кажущееся положение. На рисунке не выдержан масштаб — в действительности расстояние от Солнца до точек A и B намного превосходит расстояние от Солнца до Земли. Для лучей, проходящих в непосредственной близости к поверхности Солнца, теория дает значение угла отклонения α, равное 1,75 угловых секунд. Для лучей видимого света это явление можно наблюдать лишь во время полного солнечного затмения, когда звезды вблизи солнечного диска становятся видимыми. В силу разных причин такие измерения оказываются ненадежными. С большой точностью было определено отклонение Солнцем радиолучей от квазаров[11]) (оно должно быть таким же, как и отклонение световых лучей). Полученное значение угла α совпало с предсказанным ОТО с погрешностью до 1 %.

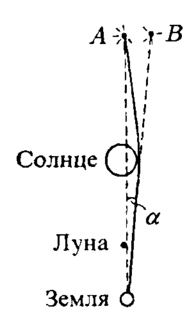


Рис. 7.11

Гравитационное красное смещение. Согласно ОТО ход времени вблизи гравитирующих объектов замедляется. Чем сильнее гравитационное поле, тем медленнее течет время по сравнению с течением времени для наблюдателя, находящегося вне поля. Таким образом, на Солнце время течет медленнее, чем на Земле. Время течет быстрее на горных вершинах, чем в долинах. В Италии, США и Японии были проделаны эксперименты, в которых сравнивался ход двух идентичных атомных часов, одни из которых находились высоко в горах. Результаты измерений оказались в полном согласии с ОТО.

Допустим, что от Солнца к Земле распространяется световая волна, причем за одну секунду солнечного време-

[11]) Квазар — квазизвездный источник радиоизлучения с длиной волны порядка нескольких сантиметров.

ни посылается ν_C гребней и впадин волны. Тогда ν_C — частота света на Солнце. Так как время на Солнце течет медленнее, чем на Земле, одной секунде солнечного времени соответствуют $(1+\delta)$ секунд земного времени $(\delta > 0)$. За этот промежуток времени на Землю придут ν_C гребней и впадин волны. Следовательно, частота света на Земле $\nu_З$ будет в $(1+\delta)$ раз меньше, чем на Солнце:

$$\nu_З = \nu_С/(1+\delta).$$

Это явление называется гравитационным красным смещением (уменьшение частоты приводит к смещению спектральной линии к красному краю спектра).

Вычисления приводят к следующей формуле для относительного изменения частоты за счет гравитационного красного смещения:

$$\frac{\nu_2 - \nu_1}{\nu} = \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{c^2}. \tag{7.31}$$

Здесь ν_1 — частота излучения в точке, в которой потенциал гравитационного поля имеет значение φ_1, а ν_2 — частота в точке, в которой гравитационный потенциал имеет значение φ_2. Разность $\nu_2 - \nu_1$ очень мала по сравнению с ν_1 или ν_2; поэтому в качестве ν в знаменателе можно взять любую из частот ν_1 и ν_2.

Рассмотрим вертикальный световой луч вблизи поверхности Земли (рис. 7.12). Согласно формуле (7.15) разность гравитационных потенциалов между точками *1* и *2* равна

$$\varphi_1 - \varphi_2 = gl.$$

Рис. 7.12

Подстановка этого значения в формулу (7.31) дает, что

$$\frac{\Delta\nu}{\nu} = \frac{gl}{c^2} \tag{7.32}$$

(мы обозначили разность частот $\nu_2 - \nu_1$ через $\Delta\nu$).

В 1960 г. американские физики Р.В. Паунд[12]) и Дж. Ребка измерили в лабораторных условиях гравитационное изменение частоты γ-фотонов. Расстояние l в

[12]) Роберт Вивиан Паунд (р. в 1919 г.) — американский физик-экспериментатор.

их опыте равнялось 21 м. Подстановка значений g, l и c в формулу (7.32) дает для относительного изменения частоты значение

$$\frac{gl}{c^2} = \frac{9{,}81 \cdot 21}{(3 \cdot 10^8)^2} \approx 2 \cdot 10^{-15}.$$

Полученный результат совпал с теоретическим.

Умножив числитель и знаменатель в левой части формулы (7.32) на постоянную Планка h и учтя, что произведение $h\nu$ дает энергию ε фотона, можно придать формуле вид

$$\Delta\varepsilon = \varepsilon/c^2 gl.$$

Согласно ньютоновской теории такое же изменение кинетической энергии получает, пройдя по вертикали расстояние l, частица с массой $m = \varepsilon/c^2$. Это обстоятельство послужило поводом для того, чтобы объяснять воздействие гравитации на свет тем, что фотон будто бы обладает массой, равной $h\nu/c^2$.

Такая точка зрения совершенно неправомерна. В случае слабых гравитационных полей и малых скоростей ($v \ll c$) ОТО переходит в ньютоновскую теорию (в закон всемирного тяготения), которая при указанных условиях оказывается справедливой. Однако фотон всегда движется со скоростью c и поэтому не может описываться нерелятивистской ньютоновской теорией. Например, расчет искривления световых лучей Солнцем согласно ньютоновской теории приводит к грубо неверному результату — отклонение оказывается ровно в два раза меньшим, чем получающееся в ОТО в полном согласии с опытом. Чтобы с помощью ньютоновской теории получить правильное значение угла отклонения лучей, нужно приписать фотону массу, равную $2h\nu/c^2$. Но не может же одна и та же частица иметь несколько различных значений массы. Правильная точка зрения заключается в том, что фотон — безмассовая частица. Это не мешает ему испытывать воздействие гравитационного поля. В теории Ньютона источником гравитационного поля служит масса тел. Согласно же ОТО гравитация порождается энергией и импульсом. Фотон, не имея массы, обладает как энергией, так и импульсом.

Фридман [13]) нашел в 1922 г. решение уравнений Эйнштейна в предположении, что вещество однородно рас-

[13]) Александр Александрович Фридман (1888–1925) — советский физик и математик.

пределено по пространству. Из этого решения следует, что однородная Вселенная не может быть стационарной. Она всегда находится в состоянии либо расширения, либо сжатия. Наблюдения показывают, что в настоящее время Вселенная находится в состоянии расширения.

В 1929 г. Хаббл [14]) обнаружил у далеких галактик одинаковое для всех спектральных линий относительное увеличение длины волны, примерно пропорциональное расстоянию r от нас до галактики:

$$\frac{\Delta\lambda}{\lambda} = Hr. \tag{7.33}$$

Это соотношение носит название закона Хаббла, а коэффициент пропорциональности H — постоянной Хаббла.

Возрастание длин волн обусловлено удалением источников света (это явление называется эффектом Доплера). Из закона Хаббла вытекает, что галактики удаляются от нас (разлетаются) со скоростями, пропорциональными расстояниям до них. Чтобы описать разбегание галактик, говорят, что Вселенная расширяется. Это расширение служит подтверждением правильности ОТО.

Следует иметь в виду, что разбегание галактик происходит не только относительно Земли (в таком случае Земля могла бы рассматриваться как «центр» Вселенной). Из любой точки Вселенной далекие галактики будут видны удаляющимися от этой точки. В этом и заключается сущность расширяющейся Вселенной.

В заключение отметим, что до сих пор не обнаружено ни одного отклонения от предсказаний общей теории относительности.

---

[14]) Эдвин Пауэлл Хаббл (1889–1953) — американский астроном.

Глава 8

Колебательное движение

8.1. Общие сведения о колебаниях

Колебаниями называются процессы, отличающиеся той или иной степенью повторяемости. Таким свойством повторяемости обладают, например, качания маятника часов, колебания струны или ножек камертона, напряжение между обкладками конденсатора в контуре радиоприемника и т. п.

В зависимости от физической природы повторяющегося процесса различают колебания: механические, электромагнитные, электромеханические и т. д. В данной главе рассматриваются механические колебания.

Колебания широко распространены в природе и технике. Во многих случаях они играют отрицательную роль. Колебания моста, возникающие из-за толчков, сообщаемых ему колесами поезда при прохождении через стыки рельсов, колебания (вибрации) корпуса корабля, вызванные вращением гребного винта, вибрации крыльев самолета — все эти процессы могут привести к катастрофическим последствиям. В подобных случаях задача заключается в том, чтобы предотвратить возникновение колебаний или во всяком случае воспрепятствовать тому, чтобы колебания достигли опасных размеров.

Вместе с тем колебательные процессы лежат в самой основе различных отраслей техники. Так, например, на колебательных процессах основана вся радиотехника.

В зависимости от характера воздействия на колеблющуюся систему различают свободные (или собственные) колебания, вынужденные колебания, автоколебания и параметрические колебания.

Свободными, или *собственными*, называются такие колебания, которые происходят в системе, предоставленной самой себе после того, как ей был сообщен толчок либо она была выведена из положения равновесия. Примером могут служить колебания шарика, подвешенного на нити (маятник). Для того чтобы вызвать колеба-

ния, можно либо толкнуть шарик, либо, отведя в сторону, отпустить его.

Вынужденными называются такие колебания, в процессе которых колеблющаяся система подвергается воздействию внешней периодически изменяющейся силы. Примером служат колебания моста, возникающие при прохождении по нему людей, шагающих в ногу.

Автоколебания, как и вынужденные колебания, сопровождаются воздействием на колеблющуюся систему внешних сил, однако моменты времени, когда осуществляются эти воздействия, задаются самой колеблющейся системой — система сама управляет внешним воздействием. Примером автоколебательной системы являются часы, в которых маятник получает толчки за счет энергии поднятой гири или закрученной пружины, причем эти толчки происходят в моменты прохождения маятника через среднее положение. При параметрических колебаниях за счет внешнего воздействия происходит периодическое изменение какого-либо параметра системы, например длины нити, к которой подвешен шарик, совершающий колебания.

Простейшими являются гармонические колебания, т. е. такие колебания, при которых колеблющаяся величина (например, отклонение маятника) изменяется со временем по закону синуса или косинуса. Этот вид колебаний особенно важен по следующим причинам: во-первых, колебания в природе и в технике часто имеют характер, очень близкий к гармоническим, и, во-вторых, периодические процессы иной формы (с другой зависимостью от времени) могут быть представлены как наложение нескольких гармонических колебаний.

Рассмотрим механическую систему, положение которой может быть задано с помощью одной величины, которую мы обозначим через x. В таких случаях говорят, что система имеет одну степень свободы. Величиной x, определяющей положение системы, может быть угол, отсчитываемый от некоторой плоскости, или расстояние, отсчитываемое вдоль заданной кривой (в частности, прямой) линии, и т. п. Потенциальная энергия системы будет функцией одной переменной x: $U = U(x)$. Допустим, что система обладает положением устойчивого равновесия. В этом положении функция $U(x)$ имеет минимум (см. § 3.9). Условимся координату x и потенциальную энергию U отсчитывать от положения равновесия. Тогда $U(0) = 0$.

Разложим функцию $U(x)$ в ряд по степеням x, причем ограничимся рассмотрением малых колебаний, так что высшими степенями x можно будет пренебречь. По формуле Маклорена

$$U(x) = U(0) + U'(0)x + \frac{1}{2}U''(0)x^2$$

(ввиду малости x остальными членами пренебрегаем). Поскольку $U(x)$ при $x = 0$ имеет минимум, $U'(0)$ равна нулю, а $U''(0)$ положительна. Кроме того, по условию $U(0) = 0$. Введем обозначение: $U''(0) = k$ $(k > 0)$. Тогда

$$U(x) = \frac{1}{2}kx^2. \tag{8.1}$$

Выражение (8.1) идентично с выражением (3.78) для потенциальной энергии деформированной пружины. Воспользовавшись соотношением (3.29), найдем силу, действующую на систему:

$$F_x = -\frac{\partial U}{\partial x} = -kx. \tag{8.2}$$

Эта формула дает проекцию силы на направление x.

В § 8.4 мы установим, что под действием силы (8.2) тело совершает гармонические колебания. Таким образом, малые колебания системы вблизи положения равновесия, независимо от конкретного вида потенциальной энергии, всегда являются гармоническими.

Выражение (8.2) тождественно выражению (2.22) для упругой силы деформированной пружины. Поэтому силы вида (8.2), независимо от их природы, называются квазиупругими. Легко сообразить, что сила, описываемая формулой (8.2), всегда направлена к положению равновесия. Модуль силы пропорционален величине отклонения системы от равновесного положения. Силу, обладающую такими свойствами. иногда называют восстанавливающей силой.

В качестве примера рассмотрим систему, состоящую из шарика массы m, подвешенного на пружине, массой которой можно пренебречь по сравнению с m (рис. 8.1). В положении равновесия сила mg уравновешивается упругой силой $k\Delta l_0$:

$$mg = k\Delta l_0 \tag{8.3}$$

(Δl_0 — удлинение пружины). Будем характеризовать смещение шарика из положения равновесия координатой x, причем ось x направим по вертикали вниз, а нуль оси совместим с положением равновесия шарика. Если сместить шарик в положение, характеризуемое координатой x, то удлинение пружины станет равным $\Delta l_0 + x$ и проекция результирующей силы на ось x примет значение $F = mg - k(\Delta l_0 + x)$. Учтя условие (8.3), получим, что

$$F_x = -kx. \tag{8.4}$$

Таким образом, в рассмотренном примере результирующая силы тяжести и упругой силы имеет характер квазиупругой силы.

Сообщим шарику смещение $x = a$, после чего предоставим систему самой себе. Под действием квазиупругой силы шарик будет двигаться к положению равновесия со все возрастающей скоростью $v = \dot{x}$. При этом потенциальная энергия системы будет убывать (рис. 8.2), но зато появится

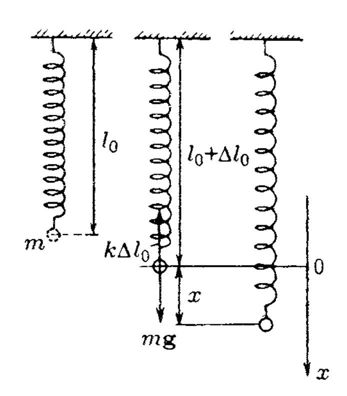


Рис. 8.1

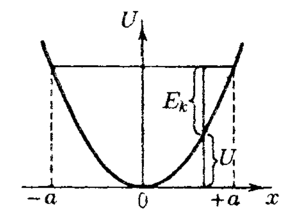


Рис. 8.2

все возрастающая кинетическая энергия[1] $E_k = m\dot{x}^2/2$ (массой пружины пренебрегаем). Придя в положение равновесия, шарик продолжает двигаться по инерции. Это движение будет замедленным и прекратится тогда, когда кинетическая энергия полностью превратится в потенциальную, т. е. когда смещение шарика станет равным $-a$. Затем такой же процесс будет протекать при движении шарика в обратном направлении. Если трение в системе отсутствует, энергия системы должна сохраняться и шарик будет двигаться в пределах от $x = a$ до $x = -a$ неограниченно долго.

[1]) В учении о колебаниях буквой T принято обозначать период колебаний. Поэтому кинетическую энергию мы обозначили символом E_k.

Уравнение второго закона Ньютона для шарика имеет вид

$$m\ddot{x} = -kx. \tag{8.5}$$

Введя обозначение

$$\omega_0^2 = k/m, \tag{8.6}$$

преобразуем уравнение (8.5) следующим образом:

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0. \tag{8.7}$$

Поскольку $k/m > 0$, ω_0 — вещественная величина.

Итак, в отсутствие сил трения движение под действием квазиупругой силы описывается дифференциальным уравнением (8.7).

Во всякой реальной колебательной системе имеются силы сопротивления, действие которых приводит к уменьшению энергии системы. Если убыль энергии не восполняется за счет работы внешних сил, колебания будут затухать. В простейшем, и вместе с тем наиболее часто встречающемся, случае сила сопротивления F^* пропорциональна скорости:

$$F_x^* = -r\dot{x}. \tag{8.8}$$

Здесь r — постоянная, называемая коэффициентом сопротивления.

Знак минус обусловлен тем, что сила $\mathbf{F}^*$ и скорость $\mathbf{v}$ имеют противоположные направления; следовательно, их проекции на ось x имеют разные знаки.

Уравнение второго закона Ньютона при наличии сил сопротивления имеет вид

$$m\ddot{x} = -kx - r\dot{x}. \tag{8.9}$$

Применив обозначения

$$2\beta = r/m, \quad \omega_0^2 = k/m \tag{8.10}$$

(ср. с (8.6)), перепишем уравнение (8.9) следующим образом:

$$\ddot{x} + 2\beta\dot{x} + \omega_0^2 x = 0. \tag{8.11}$$

Это дифференциальное уравнение описывает затухающие колебания системы.

Колебания, описываемые уравнениями (8.7) и (8.11), являются свободными (или собственными): выведенная из положения равновесия или получившая толчок система

совершает колебания, будучи предоставленной самой себе. Теперь пусть колебательная система подвергается действию внешней силы, изменяющейся со временем по гармоническому закону:

$$F_x = F_0 \cos \omega t. \tag{8.12}$$

В этом случае уравнение второго закона Ньютона имеет вид

$$m\ddot{x} = -kx - r\dot{x} + F_0 \cos \omega t.$$

Введя обозначения (8.10), запишем это уравнение следующим образом:

$$\ddot{x} + 2\beta\dot{x} + \omega_0^2 x = f_0 \cos \omega t, \tag{8.13}$$

где

$$f_0 = F_0/m. \tag{8.14}$$

Уравнение (8.13) описывает вынужденные колебания.

Мы выяснили, что при изучении колебаний различного вида мы сталкиваемся с необходимостью решать дифференциальные уравнения вида

$$\ddot{x} + a\dot{x} + bx = f(t), \tag{8.15}$$

где a и b — константы, $f(t)$ — некоторая функция от t. Уравнение типа (8.15) называется *линейным дифференциальным уравнением с постоянными коэффициентами*. В случае уравнения (8.7) $a = 0$, $b = \omega_0^2$, в случае уравнения (8.11) $a = 2\beta$, $b = \omega_0^2$. В обоих случаях функция $f(t)$ тождественно равна нулю: $f(t) \equiv 0$. В случае вынужденных колебаний $f(t) = f_0 \cos \omega t$.

Решение уравнения (8.15) сильно облегчается, если перейти к комплексным величинам. Поэтому прежде чем перейти к детальному рассмотрению колебаний различного вида, мы познакомимся кратко с комплексными числами и методами решения линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами.

8.2. Комплексные числа

Комплексным числом z называется число вида

$$z = x + iy, \tag{8.16}$$

где x и y — вещественные числа, i — мнимая единица ($i^2 = -1$).

Число x называется **вещественной частью** комплексного числа z. Символически это записывается в виде $x = \mathrm{Re}\, z$. Число y называется **мнимой частью** числа z (записывается: $y = \mathrm{Im}\ z$). Число

$$z^* = x - iy \tag{8.17}$$

называется **комплексно сопряженным** числу $x + iy$.

Вещественному числу x можно сопоставить точку на оси x. Комплексному числу z можно сопоставить точку на плоскости, имеющую координаты x, y (рис. 8.3). Каждая точка плоскости определяет некоторое комплексное число z. Следовательно, комплексное число можно задать в виде (8.16) с помощью декартовых координат x и y соответствующей точки. Однако то же самое число можно задать с помощью полярных координат ρ и φ. Между обеими парами координат имеются соотношения

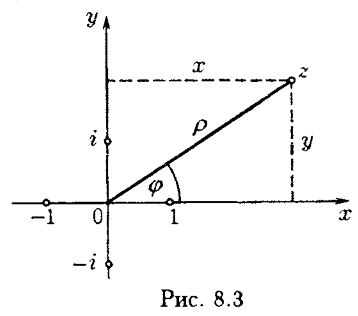


Рис. 8.3

$$\begin{gathered} x = \rho\cos\varphi, \\ y = \rho\sin\varphi; \\ \rho = \sqrt{x^2 + y^2}, \\ \varphi = \mathrm{arctg}\,(y/x). \end{gathered} \tag{8.18}$$

Расстояние от начала координат до точки, изображающей число z, называется **модулем** комплексного числа (обозначается $|z|$). Очевидно, что

$$|z| = \rho = \sqrt{x^2 + y^2}. \tag{8.19}$$

Число φ называют **аргументом** комплексного числа z.

Приняв во внимание соотношения (8.18), можно представить комплексное число в тригонометрической форме:

$$z = \rho(\cos\varphi + i\sin\varphi). \tag{8.20}$$

Два комплексных числа, $z_1 = x_1 + iy_1$ и $z_2 = x_2 + iy_2$, считаются равными друг другу, если в отдельности равны их вещественные и мнимые части:

$$z_1 = z_2, \text{ если } x_1 = x_2 \text{ и } y_1 = y_2. \tag{8.21}$$

Модули двух равных между собой комплексных чисел одинаковы, а аргументы могут различаться лишь слагаемым, кратным 2π:

$$\rho_1 = \rho_2, \quad \varphi_1 = \varphi_2 \pm 2k\pi. \tag{8.22}$$

Из выражений (8.16) и (8.17) видно, что в случае, когда $z^* = z$, мнимая часть z есть нуль, т. е. число z оказывается чисто вещественным. Таким образом, условие вещественности числа z можно записать в виде

$$z^* = z. \tag{8.23}$$

В математике доказывается соотношение

$$\exp(i\varphi) = \cos\varphi + i\sin\varphi, \tag{8.24}$$

которое называется формулой Эйлера. Заменив в этой формуле φ на $-\varphi$ и учтя, что $\cos(-\varphi) = \cos\varphi$, а $\sin(-\varphi) = -\sin\varphi$, получим соотношение

$$\exp(-i\varphi) = \cos\varphi - i\sin\varphi. \tag{8.25}$$

Сложим (8.24) и (8.25) и решим получившееся соотношение относительно $\cos\varphi$. В результате имеем

$$\cos\varphi = \frac{\exp(i\varphi) + \exp(-i\varphi)}{2}. \tag{8.26}$$

Вычтя (8.25) из (8.24), получим, что

$$\sin\varphi = \frac{\exp(i\varphi) - \exp(-i\varphi)}{2i}.$$

С помощью формулы (8.24) комплексное число можно записать в показательной форме:

$$z = \rho\exp(i\varphi) \tag{8.27}$$

(см. (8.20)). Комплексно сопряженное число в показательной форме имеет вид

$$z^* = \rho\exp(-i\varphi). \tag{8.28}$$

При сложении комплексных чисел складываются отдельно их вещественные и мнимые части:

$$z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2). \tag{8.29}$$

Перемножение комплексных чисел удобно осуществлять, беря эти числа в показательной форме:

$$z = z_1 \cdot z_2 = \rho_1 \exp(i\varphi_1) \cdot \rho_2 \exp(i\varphi_2) = \\ = \rho_1 \rho_2 \exp[i(\varphi_1 + \varphi_2)]. \quad (8.30)$$

Модули комплексных чисел перемножаются, а аргументы складываются:

$$\rho = \rho_1 \cdot \rho_2, \quad \varphi = \varphi_1 + \varphi_2. \quad (8.31)$$

Аналогично осуществляется деление комплексных чисел:

$$z = \frac{z_1}{z_2} = \frac{\rho_1 \exp(i\varphi_1)}{\rho_2 \exp(i\varphi_2)} = \frac{\rho_1}{\rho_2} \exp[i(\varphi_1 - \varphi_2)]. \quad (8.32)$$

Приняв во внимание формулы (8.27) и (8.28), легко получить, что

$$zz^* = \rho^2 \quad (8.33)$$

(квадрат модуля комплексного числа равен произведению этого числа на его комплексно сопряженное).

8.3. Линейные дифференциальные уравнения

Уравнение вида

$$\ddot{x} + a\dot{x} + bx = f(t), \quad (8.34)$$

где a и b — константы, $f(t)$ — заданная функция от t, называется линейным дифференциальным уравнением второго порядка с постоянными коэффициентами. Константы a и b могут быть и нулями.

Если функция $f(t)$ тождественно равна нулю ($f(t) \equiv 0$), уравнение называется однородным, в противном случае — неоднородным. Однородное уравнение имеет вид

$$\ddot{x} + a\dot{x} + bx = 0. \quad (8.35)$$

Решение всякого дифференциального уравнения второго порядка (т. е. со старшей второй производной) содержит две произвольные константы C_1 и C_2. Это можно понять, приняв во внимание, что определение функции

по ее второй производной осуществляется двукратным интегрированием. При каждом интегрировании появляется постоянная интегрирования. Рассмотрим в качестве примера уравнение

$$\ddot{x} = 0. \tag{8.36}$$

Интегрирование этого уравнения дает, что $\dot{x} = C_1$. Повторное интегрирование приводит к функции

$$x = C_1 t + C_2. \tag{8.37}$$

Легко убедиться в том, что при любых значениях постоянных C_1 и C_2 функция (8.37) удовлетворяет уравнению (8.36).

Придав постоянным C_1 и C_2 определенные значения, получим так называемое *частное решение* дифференциального уравнения. Например, функция $5t+3$ является одним из частных решений уравнения (8.36).

Множество всех без исключения частных решений называется *общим решением* дифференциального уравнения. Общее решение уравнения (8.36) имеет вид (8.37).

В теории линейных дифференциальных уравнений доказывается, что если x_1 и x_2 суть линейно независимые[2]) решения однородного уравнения (8.35), то общее решение этого уравнения можно представить в виде

$$x = C_1 x_1 + C_2 x_2, \tag{8.38}$$

где C_1 и C_2 — произвольные постоянные.

Пусть $x_н(t, C_1, C_2)$ есть общее решение неоднородного уравнения (8.34) (произвольные постоянные C_1 и C_2 входят в это решение в качестве параметров), а $x_н(t)$ — одно из частных решений того же уравнения (оно не содержит произвольных постоянных). Введем обозначение

$$x(t, C_1, C_2) = x_н(t, C_1, C_2) - x_н(t).$$

Тогда общее решение неоднородного уравнения можно представить в виде

$$x_н(t, C_1, C_2) = x_н(t) + x(t, C_1, C_2). \tag{8.39}$$

---

[2]) Функции x_1 и x_2 называются линейно независимыми, если соотношение $\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 \equiv 0$ выполняется только в том случае, когда α_1 и α_2 равны нулю.

Функция (8.39) при любых значениях постоянных C_1 и C_2 удовлетворяет уравнению (8.34). Следовательно, можно написать соотношение

$$\ddot{x}_{\text{н}}(t) + \ddot{x}(t, C_1, C_2) + a\dot{x}_{\text{н}}(t) + a\dot{x}(t, C_1, C_2) + \\ + bx_{\text{н}}(t) + bx(t, C_1, C_2) = f(t).$$

Сгруппировав слагаемые, получим

$$\ddot{x}(t, C_1, C_2) + a\dot{x}(t, C_1, C_2) + bx(t, C_1, C_2) + \\ + [\ddot{x}_{\text{н}}(t) + a\dot{x}_{\text{н}}(t) + bx_{\text{н}}(t)] = f(t). \quad (8.40)$$

Частное решение $x_{\text{н}}(t)$ также удовлетворяет уравнению (8.34). Поэтому выражение, стоящее в квадратных скобках в левой части соотношения (8.40), равно правой части этого соотношения. Отсюда вытекает, что функция $x(t, C_1, C_2)$ должна удовлетворять условию

$$\ddot{x}(t, C_1, C_2) + a\dot{x}(t, C_1, C_2) + bx(t, C_1, C_2) = 0,$$

т. е. представляет собой общее решение однородного уравнения (8.35). Таким образом, мы пришли к очень полезной теореме: *общее решение неоднородного уравнения равно сумме общего решения соответствующего однородного уравнения и какого-либо частного решения неоднородного уравнения*:

$$x_{\text{общ, неоднор}} = x_{\text{общ,однор}} + x_{\text{частн,неоднор}}. \quad (8.41)$$

Линейные однородные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами решают с помощью подстановки

$$x(t) = \exp(\lambda t), \quad (8.42)$$

где λ — постоянная величина. Дифференцирование функции (8.42) дает

$$\dot{x}(t) = \lambda \exp(\lambda t), \quad \ddot{x}(t) = \lambda^2 \exp(\lambda t). \quad (8.43)$$

Подстановка выражений (8.42) и (8.43) в уравнение (8.35) приводит после сокращения на отличный от нуля множитель $\exp(\lambda t)$ к алгебраическому уравнению

$$\lambda^2 + a\lambda + b = 0. \quad (8.44)$$

Это уравнение называется характеристическим. Корни этого уравнения представляют собой те значения λ, при которых функция (8.42) удовлетворяет уравнению (8.35).

Если корни уравнения (8.44) не совпадают ($\lambda_1 \neq \lambda_2$), функции $\exp(\lambda_1 t)$ и $\exp(\lambda_2 t)$ будут линейно независимыми. Следовательно, согласно (8.38) общее решение уравнения (8.35) можно написать в виде

$$x = C_1 \exp(\lambda_1 t) + C_2 \exp(\lambda_2 t). \tag{8.45}$$

Можно показать, что в случае, когда $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$, общее решение уравнения (8.35) выглядит следующим образом:

$$x = C_1 \exp(\lambda t) + C_2 t \exp(\lambda t). \tag{8.46}$$

Допустим, что коэффициенты a и b — вещественные, а функция, стоящая в правой части уравнения (8.34), комплексная. Представив эту функцию в виде $f(t) + i\varphi(t)$, придем к уравнению

$$\ddot{z} + a\dot{z} + bz = f + i\varphi \tag{8.47}$$

(мы обозначили искомую функцию буквой z). Решение этого уравнения будет, очевидно, комплексным. Записав решение в виде $z(t) = x(t) + iy(t)$, подставим его в уравнение (8.47). В результате получим

$$\ddot{x} + i\ddot{y} + a\dot{x} + ai\dot{y} + bx + biy = f + i\varphi. \tag{8.48}$$

У равных друг другу комплексных чисел равны порознь вещественные и мнимые части (см. (8.21)). Следовательно, уравнение (8.48) распадается на два независимых уравнения:

$$\ddot{x} + a\dot{x} + bx = f(t), \quad \ddot{y} + a\dot{y} + by = \varphi(t),$$

первое из которых совпадает с уравнением (8.34). Это свойство уравнения (8.48) позволяет применить следующий прием, иногда значительно облегчающий вычисления. Пусть в решаемом нами уравнении (8.34) правая часть вещественная. Прибавив к ней произвольную мнимую функцию, приведем уравнение к виду (8.47). Найдя затем комплексное решение уравнения, возьмем его вещественную часть. Она будет представлять собой решение исходного уравнения (уравнения (8.34)).

8.4. Гармонические колебания

Рассмотрим колебания, описываемые уравнением

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0 \tag{8.49}$$

(см. (8.7)). Такие колебания совершает тело массы m, на которое действует только квазиупругая сила $F_x = -kx$. Коэффициент при x в уравнении (8.49) имеет значение

$$\omega_0^2 = k/m \tag{8.50}$$

(см. формулу (8.6)).

Подставив в (8.49) выражение $x = \exp(\lambda t)$ (см. (8.42)), придем к характеристическому уравнению

$$\lambda^2 + \omega_0^2 = 0.$$

Это уравнение имеет мнимые корни

$$\lambda_1 = +i\omega_0, \quad \lambda_2 = -i\omega_0.$$

Согласно (8.45) общее решение уравнения (8.49) имеет вид

$$x = C_1 \exp(i\omega_0 t) + C_2 \exp(-i\omega_0 t), \tag{8.51}$$

где C_1 и C_2 — комплексные постоянные.

Описывающая колебание функция $x(t)$ должна быть вещественной. Для этого коэффициенты C_1 и C_2 в (8.51) нужно выбрать так, чтобы выполнялось условие (см. (8.23))

$$C_1^* \exp(-i\omega_0 t) + C_2^* \exp(i\omega_0 t) = \\ = C_1 \exp(i\omega_0 t) + C_2 \exp(-i\omega_0 t) \tag{8.52}$$

(мы приравняли выражение (8.51) его комплексно сопряженному). Соотношение (8.52) будет выполнено, если $C_1 = C_2^*$ (в этом случае $C_2 = C_1^*$). Представим удовлетворяющие такому условию коэффициенты C_1 и C_2 в показательной форме (см. (8.27)), обозначив их модуль через $a/2$, а аргумент буквой α:

$$C_1 = (a/2) \exp(i\alpha), \quad C_2 = (a/2) \exp(-i\alpha). \tag{8.53}$$

Подстановка этих выражений в (8.51) дает

$$x = (a/2)\,\{\exp[i(\omega_0 t+\alpha)] + \exp[-i(\omega_0 t+\alpha)]\} = \\ = a\cos(\omega_0 t+\alpha) \quad (8.54)$$

(см. формулу (8.26)). Таким образом, общее решение уравнения (8.49) имеет вид

$$x = a\cos(\omega_0 t+\alpha), \qquad (8.55)$$

где a и α — произвольные постоянные[3]).

Итак, смещение x изменяется со временем по закону косинуса. Следовательно, движение системы, находящейся под действием силы вида $F_x = -kx$, представляет собой гармоническое колебание.

График гармонического колебания, т. е. график функции (8.55), показан на рис. 8.4. По горизонтальной оси отложено время t, по вертикальной оси — смещение x. Поскольку косинус изменяется в пределах от -1 до $+1$, значения x лежат в пределах от $-a$ до $+a$.

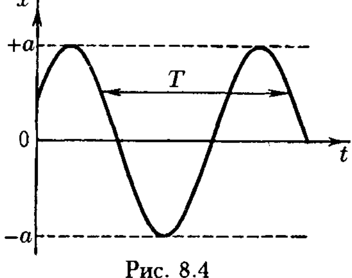


Рис. 8.4

Величина наибольшего отклонения системы от положения равновесия называется **амплитудой** колебания. Амплитуда a — постоянная положительная величина. Ее значение определяется величиной первоначального отклонения или толчка, которым система была выведена из положения равновесия.

---

[3]) Решение уравнения (8.49) можно записать еще двумя способами. Преобразуем выражение (8.55) по формуле для косинуса суммы

$$x = a\big[\cos\alpha\cos(\omega_0 t) - \sin\alpha\sin(\omega_0 t)\big]$$

и введем обозначения

$$c_1 = a\cos\alpha, \qquad c_2 = -a\sin\alpha.$$

Тогда функцию $x(t)$ можно представить в виде

$$x = c_1\cos(\omega_0 t) + c_2\sin(\omega_0 t),$$

где c_1 и c_2 — произвольные постоянные

Наконец, воспользовавшись формулой (8.24), можно написать выражение (8.55) следующим образом:

$$x = \mathrm{Re}\left\{a\exp\left[i(\omega_0 t+\alpha)\right]\right\}.$$

Величина $(\omega_0 t + \alpha)$, стоящая под знаком косинуса, называется **фазой** колебания. Постоянная α представляет собой значение фазы в момент времени $t = 0$ и называется **начальной фазой** колебания. С изменением начала отсчета времени будет изменяться и α. Следовательно, значение начальной фазы определяется выбором начала отсчета времени. Так как значение x не изменяется при добавлении или вычитании из фазы целого числа 2π, всегда можно добиться того, чтобы начальная фаза была по модулю меньше π. Поэтому обычно рассматриваются только значения α, лежащие в пределах от $-\pi$ до $+\pi$.

Поскольку косинус — периодическая функция с периодом 2π, различные состояния [4]) системы, совершающей гармонические колебания, повторяются через такой промежуток времени T, за который фаза колебания получает приращение, равное 2π (рис. 8.4). Этот промежуток времени T называется **периодом** колебания. Он может быть определен из следующего условия:

$$[\omega_0(t + T) + \alpha] = [\omega_0 t + \alpha] + 2\pi,$$

откуда

$$T = 2\pi/\omega_0. \tag{8.56}$$

Число колебаний в единицу времени называется **частотой** колебания ν. Очевидно, что частота ν связана с продолжительностью одного колебания T следующим соотношением:

$$\nu = 1/T. \tag{8.57}$$

За единицу частоты принимается частота такого колебания, период которого равен 1 с. Эту единицу называют [5]) **герцем** (Гц). Частота 10^3 Гц называется килогерцем (кГц), 10^6 Гц — мегагерцем (МГц).

Из (8.56) следует, что

$$\omega_0 = 2\pi/T. \tag{8.58}$$

Таким образом, ω_0 дает число колебаний за 2π секунд. Величину ω_0 называют **круговой** или **циклической** частотой. Она связана с обычной частотой ν соотношением

$$\omega_0 = 2\pi\nu. \tag{8.59}$$

---

[4]) Напомним, что состояние механической системы характеризуется значениями координат и скоростей тел, образующих систему.

[5]) В честь немецкого физика Генриха Рудольфа Герца (1857–1894)

Продифференцировав (8.55) по времени, получим выражение для скорости

$$v = \dot{x} = -a\omega_0 \sin(\omega_0 t + \alpha) = a\omega_0 \cos(\omega_0 t + \alpha + \pi/2). \tag{8.60}$$

Как видно из (8.60), скорость также изменяется по гармоническому закону, причем амплитуда скорости равна $a\omega_0$. Из сравнения (8.55) и (8.60) следует, что скорость опережает смещение по фазе на $\pi/2$.

Продифференцировав (8.60) еще раз по времени, найдем выражение для ускорения:

$$w = \ddot{x} = -a\omega_0^2 \cos(\omega_0 t + \alpha) = a\omega_0^2 \cos(\omega_0 t + \alpha + \pi). \tag{8.61}$$

Как следует из (8.61), ускорение и смещение находятся в противофазе. Это означает, что в тот момент, когда смещение достигает наибольшего положительного значения, ускорение достигает наибольшего по величине отрицательного значения, и наоборот.

На рис. 8.5 сопоставлены графики для смещения, скорости и ускорения.

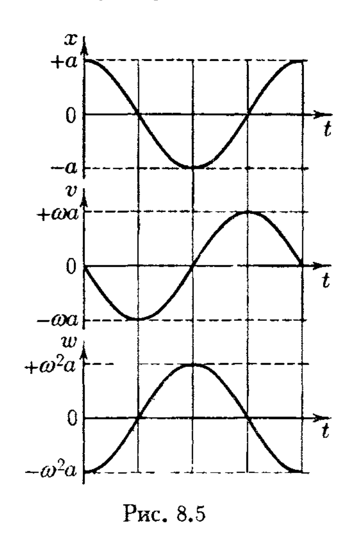


Рис. 8.5

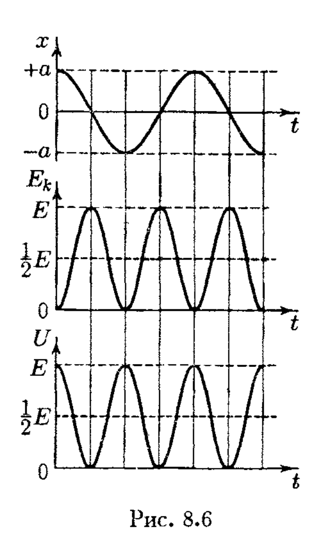


Рис. 8.6

Каждое конкретное колебание характеризуется определенными значениями амплитуды a и начальной фазы α. Значения этих величин для данного колебания могут быть

определены из так называемых **начальных условий**, т. е. по значениям отклонения x_0 и скорости v_0 в начальный момент времени. Действительно, положив в (8.55) и (8.60) $t = 0$, получим два уравнения:

$$x_0 = a\cos\alpha, \quad v_0 = -a\omega_0 \sin\alpha,$$

из которых находим, что

$$a = \sqrt{x_0^2 + v_0^2/\omega_0^2}, \tag{8.62}$$

$$\operatorname{tg}\alpha = -v_0/(x_0\omega_0). \tag{8.63}$$

Уравнение (8.63) удовлетворяется двумя значениями α, лежащими в интервале от $-\pi$ до $+\pi$. Из этих значений нужно взять то, при котором получаются правильные знаки у косинуса и синуса.

Квазиупругая сила является консервативной. Поэтому полная энергия гармонического колебания должна оставаться постоянной. В процессе колебаний происходит превращение кинетической энергии в потенциальную и обратно, причем в моменты наибольшего отклонения от положения равновесия полная энергия E состоит из потенциальной энергии, которая достигает своего наибольшего значения $U_{\max}$:

$$E = U_{\max} = \frac{ka^2}{2}; \tag{8.64}$$

при прохождении же системы через положение равновесия полная энергия состоит лишь из кинетической энергии, которая в эти моменты достигает своего наибольшего значения $E_{k\,\max}$:

$$E = E_{k\,\max} = \frac{mv_{\max}^2}{2} = \frac{ma^2\omega_0^2}{2} \tag{8.65}$$

(выше было показано, что амплитуда скорости равна $a\omega_0$). Выражения (8.64) и (8.65) равны друг другу, так как согласно (8.50) $m\omega_0^2 = k$.

Выясним, как изменяются со временем кинетическая и потенциальная энергии гармонического колебания. Кинетическая энергия равна (см. выражение (8.60) для $\dot{x}$)

$$E_k = \frac{m\dot{x}^2}{2} = \frac{ma^2\omega_0^2}{2}\sin^2(\omega_0 t + \alpha). \tag{8.66}$$

Потенциальная энергия выражается формулой

$$U = \frac{kx^2}{2} = \frac{ka^2}{2}\cos^2(\omega_0 t + \alpha). \qquad (8.67)$$

Сложив (8.66) с (8.67) и приняв во внимание, что $m\omega_0^2 = k$, получим формулу для полной энергии:

$$E = E_k + U = \frac{ka^2}{2} = \frac{ma^2\omega_0^2}{2} \qquad (8.68)$$

(ср. с (8.64) и (8.65)). Таким образом, полная энергия гармонического колебания действительно оказывается постоянной.

Используя известные формулы тригонометрии, выражениям для E_k и U можно придать вид

$$E_k = E\sin^2(\omega_0 t + \alpha) = E\left[\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 2(\omega_0 t + \alpha)\right], \qquad (8.69)$$

$$U = E\cos^2(\omega_0 t + \alpha) = E\left[\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 2(\omega_0 t + \alpha)\right], \qquad (8.70)$$

где E — полная энергия системы. Из этих формул видно, что E_k и U изменяются с частотой $2\omega_0$, т. е. с частотой, в два раза превышающей частоту гармонического колебания. На рис. 8.6 сопоставлены графики для x, E_k и U.

Среднее значение квадрата синуса и квадрата косинуса равно, как известно, половине. Следовательно, среднее значение E_k совпадает со средним значением U и равно $E/2$.

8.5. Маятник

В физике под маятником понимают твердое тело, совершающее под действием силы тяжести колебания вокруг неподвижной точки или оси. Принято различать математический и физический маятники.

Математическим маятником называют идеализированную систему, состоящую из невесомой и нерастяжимой нити, на которой подвешена масса, сосредоточенная в одной точке. Достаточно хорошим приближением к математическому маятнику служит небольшой тяжелый шарик, подвешенный на длинной тонкой нити.

Отклонение маятника от положения равновесия будем характеризовать углом φ, образованным нитью с вертикалью (рис. 8.7). При отклонении маятника от положения равновесия возникает вращающий момент N, равный $mgl\sin\varphi$ (m — масса, а l — длина маятника). Он имеет такое направление, что стремится вернуть маятник в положение равновесия, и аналогичен в этом отношении квазиупругой силе. Поэтому так же, как смещению и квазиупругой силе, моменту N и угловому смещению φ нужно приписывать противоположные знаки[6]. Следовательно, выражение для вращающего момента имеет вид

Рис. 8.7

$$N = -mgl\sin\varphi. \tag{8.71}$$

Напишем для маятника уравнение динамики вращательного движения. Обозначив угловое ускорение через $\ddot{\varphi}$ и учитывая, что момент инерции маятника равен ml^2, получаем

$$ml^2\ddot{\varphi} = -mgl\sin\varphi.$$

Последнее уравнение можно привести к виду

$$\ddot{\varphi} + \frac{g}{l}\sin\varphi = 0. \tag{8.72}$$

Ограничимся рассмотрением малых колебаний. В этом случае можно положить $\sin\varphi \approx \varphi$. Введя, кроме того, обозначение

$$g/l = \omega_0^2, \tag{8.73}$$

придем к уравнению

$$\ddot{\varphi} + \omega_0^2\varphi = 0, \tag{8.74}$$

которое идентично с уравнением (8.49). Его решение имеет вид

$$\varphi = a\cos(\omega_0 t + \alpha). \tag{8.75}$$

Следовательно, при малых колебаниях угловое отклонение математического маятника изменяется со временем по гармоническому закону.

---

[6]) Рассматривая $\boldsymbol{\varphi}$ как вектор, связанный с направлением поворота правилом правого винта (это допустимо при малых $\boldsymbol{\varphi}$), противоположность знаков при $\mathbf{N}$ и $\boldsymbol{\varphi}$ можно объяснить тем, что векторы $\mathbf{N}$ и $\boldsymbol{\varphi}$ направлены в противоположные стороны (см. рис. 8.7).

Как следует из (8.73), частота колебаний математического маятника зависит только от длины маятника и от ускорения свободного падения и не зависит от массы маятника. По формуле (8.56) с учетом (8.73) получается выражение для периода колебаний математического маятника:

$$T = 2\pi\sqrt{l/g}. \tag{8.76}$$

Отметим, что, решив уравнение (8.72), можно найти для периода колебаний следующую формулу:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}\left\{1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 \sin^2\frac{a}{2} + \left(\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\right)^2 \sin^4\frac{a}{2} + \ldots\right\},$$

где a — амплитуда колебаний, т. е. наибольший угол, на который отклоняется маятник из положения равновесия.

Если колеблющееся тело нельзя представить как материальную точку, маятник называется **физическим**. При отклонении маятника от положения равновесия на угол φ возникает вращающий момент, стремящийся вернуть маятник в положение равновесия. Этот момент равен

$$N = -mgl\sin\varphi, \tag{8.77}$$

где m — масса маятника, а l — расстояние между точкой подвеса O и центром масс C маятника (рис. 8.8). Знак «минус» имеет то же значение, что и в случае формулы (8.71).

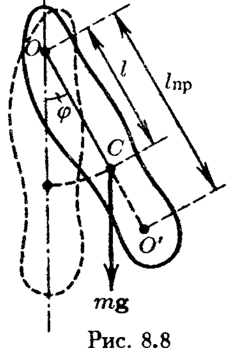


Рис. 8.8

Обозначив момент инерции маятника относительно оси, проходящей через точку подвеса, буквой I, можно написать

$$I\ddot{\varphi} = -mgl\sin\varphi. \tag{8.78}$$

В случае малых колебаний (8.78) переходит в уже известное нам уравнение:

$$\ddot{\varphi} + \omega_0^2\varphi = 0. \tag{8.79}$$

Через ω_0^2 обозначена в данном случае следующая величина:

$$\omega_0^2 = mgl/I. \tag{8.80}$$

Из уравнений (8.79) и (8.80) следует, что при малых отклонениях от положения равновесия физический маятник совершает гармонические колебания, частота которых зависит от массы маятника, момента инерции маятника относительно оси вращения и расстояния между осью вращения и центром масс маятника. В соответствии с (8.80) период колебаний физического маятника определяется выражением

$$T = 2\pi\sqrt{I/(mgl)}. \tag{8.81}$$

Из сопоставления формул (8.76) и (8.81) получается, что математический маятник длиной

$$l_{\text{пр}} = I/(ml) \tag{8.82}$$

будет иметь такой период колебаний, как и данный физический маятник. Величину (8.82) называют приведенной длиной физического маятника. Таким образом, приведенная длина физического маятника — это длина такого математического маятника, период колебаний которого совпадает с периодом данного физического маятника.

Точка, лежащая на расстоянии приведенной длины от оси вращения на прямой, соединяющей точку подвеса с центром масс, называется центром качания физического маятника (см. точку O' на рис. 8.8). Можно показать (рекомендуем это сделать в порядке упражнения), что при подвешивании маятника в центре качания O' приведенная длина, а значит, и период колебаний будут теми же, что и вначале. Следовательно, точка подвеса и центр качания обладают свойством взаимности: при переносе точки подвеса в центр качания прежняя точка подвеса становится новым центром качания.

На этом свойстве основано определение ускорения свободного падения с помощью так называемого оборотного маятника. Оборотным называется такой маятник, у которого имеются две параллельные друг другу, закрепленные вблизи его концов опорные призмы, за которые он может поочередно подвешиваться. Вдоль маятника могут перемещаться и закрепляться на нем тяжелые грузы. Перемещением грузов добиваются того, чтобы при подвешивании маятника за любую из призм период колебаний был одинаков. Тогда расстояние между опорными ребрами призм

будет равно $l_{пр}$. Измерив период колебаний маятника и зная $l_{пр}$, можно по формуле

$$T = 2\pi\sqrt{l_{пр}/g}$$

найти ускорение свободного падения g.

8.6. Векторная диаграмма

Решение ряда вопросов, в частности сложение нескольких колебаний одинакового направления (или, что то же самое, сложение нескольких гармонических функций), значительно облегчается и становится наглядным, если изображать колебания графически в виде векторов на плоскости. Полученная таким способом схема называется *векторной диаграммой*.

Возьмем ось, которую обозначим буквой x (рис. 8.9). Из точки O, взятой на оси, отложим вектор длины a, образующий с осью угол α. Если привести этот вектор во вращение с угловой скоростью ω_0, то проекция конца вектора будет перемещаться по оси x в пределах от $-a$ до $+a$, причем координата этой проекции будет изменяться со временем по закону

$$x = a\cos(\omega_0 t + \alpha).$$

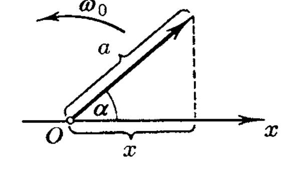


Рис. 8.9

Следовательно, проекция конца вектора на ось будет совершать гармоническое колебание с амплитудой, равной длине вектора, с круговой частотой, равной угловой скорости вращения вектора, и с начальной фазой, равной углу, образуемому вектором с осью в начальный момент времени.

Из сказанного следует, что гармоническое колебание может быть задано с помощью вектора, длина которого равна амплитуде колебания, а направление вектора образует с осью x угол, равный начальной фазе колебания.

Рассмотрим сложение двух гармонических колебаний одинакового направления и одинаковой частоты. Смещение x колеблющегося тела будет суммой смещений x_1 и x_2, которые запишутся следующим образом:

$$x_1 = a_1\cos(\omega_0 t + \alpha_1), \quad x_2 = a_2\cos(\omega_0 t + \alpha_2). \quad (8.83)$$

Представим оба колебания с помощью векторов $\mathbf{a}_1$ и $\mathbf{a}_2$ (рис. 8.10). Построим по правилам сложения векторов результирующий вектор $\mathbf{a}$. Проекция этого вектора на ось x равна сумме проекций слагаемых векторов:

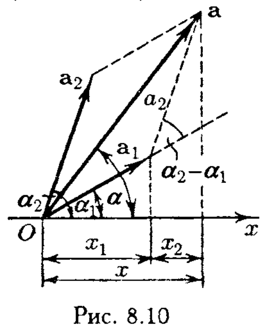


Рис. 8.10

$$x = x_1 + x_2.$$

Следовательно, вектор $\mathbf{a}$ представляет собой результирующее колебание. Этот вектор вращается с той же угловой скоростью ω_0, как и векторы $\mathbf{a}_1$ и $\mathbf{a}_2$, так что результирующее движение будет гармоническим колебанием с частотой ω_0, амплитудой a и начальной фазой α. Из построения видно, что

$$a^2 = a_1^2 + a_2^2 - 2a_1a_2\cos[\pi - (\alpha_2 - \alpha_1)] =$$
$$= a_1^2 + a_2^2 + 2a_1a_2\cos(\alpha_2 - \alpha_1), \quad (8.84)$$

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{a_1\sin\alpha_1 + a_2\sin\alpha_2}{a_1\cos\alpha_1 + a_2\cos\alpha_2}. \quad (8.85)$$

Итак, представление гармонических колебаний посредством векторов дает возможность свести сложение нескольких колебаний к операции сложения векторов. Этот прием бывает особенно полезен, например, в оптике, где световые колебания в некоторой точке определяются как результат наложения многих колебаний, приходящих в данную точку от различных участков волнового фронта.

Формулы (8.84) и (8.85) можно, конечно, получить, сложив выражения (8.83) и произведя соответствующие тригонометрические преобразования. Но примененный нами способ получения этих формул отличается большей простотой и наглядностью.

Проанализируем выражение (8.84) для амплитуды. Если разность фаз обоих колебаний $\alpha_2 - \alpha_1$ равна нулю, амплитуда результирующего колебания равна сумме a_1 и a_2. Если разность фаз $\alpha_2 - \alpha_1$ равна $+\pi$ или $-\pi$, т. е. оба колебания находятся в противофазе, то амплитуда результирующего колебания равна $|a_1 - a_2|$.

Если частоты колебаний x_1 и x_2 неодинаковы, векторы $\mathbf{a}_1$ и $\mathbf{a}_2$ будут вращаться с различной скоростью. В этом

случае результирующий вектор **a** пульсирует по величине и вращается с непостоянной скоростью. Следовательно, результирующим движением будет в этом случае не гармоническое колебание, а некоторый сложный колебательный процесс.

8.7. Биения

Особый интерес представляет случай, когда два складываемых гармонических колебания одинакового направления мало различаются по частоте. Как мы сейчас покажем, результирующее движение при этих условиях можно рассматривать как гармоническое колебание с пульсирующей амплитудой. Такое колебание называется биениями.

Обозначим частоту одного из колебаний буквой ω, частоту второго колебания через $\omega + \Delta\omega$. По условию $\Delta\omega \ll \omega$. Амплитуды обоих колебаний будем полагать одинаковыми и равными a. Чтобы не усложнять без надобности формул, допустим, что начальные фазы обоих колебаний равны нулю. Тогда уравнения колебаний будут иметь следующий вид:

$$x_1 = a\cos(\omega t), \qquad x_2 = a\cos[(\omega + \Delta\omega)t].$$

Складывая эти выражения и применяя тригонометрическую формулу для суммы косинусов, получаем

$$x = x_1 + x_2 = 2a\cos\left(\frac{\Delta\omega}{2}t\right)\cos(\omega t) \qquad (8.86)$$

(во втором множителе пренебрегаем членом $\Delta\omega/2$ по сравнению с ω). График функции (8.86) изображен на рис. 8.11 *а*. График построен для $\omega/\Delta\omega = 10$.

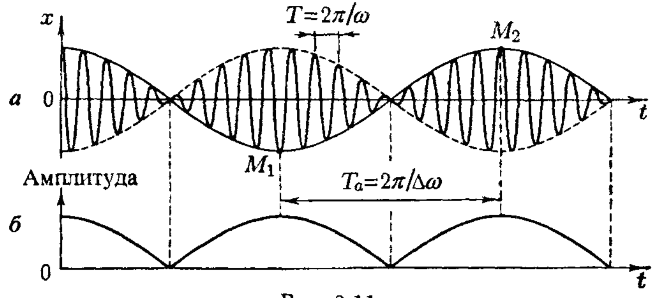


Рис. 8.11

Заключенный в квадратные скобки множитель в формуле (8.86) изменяется гораздо медленнее, чем второй множитель. Ввиду условия $\Delta\omega \ll \omega$ за то время, за которое множитель $\cos(\omega t)$ совершает несколько полных колебаний, множитель, стоящий в квадратных скобках, почти не изменяется. Это дает нам основание рассматривать колебание (8.86) как гармоническое колебание частоты ω, амплитуда которого изменяется по некоторому периодическому закону. Выражением этого закона не может быть множитель, стоящий в квадратных скобках, так как он изменяется в пределах от $-2a$ до $+2a$, в то время как амплитуда по определению — положительная величина. График амплитуды показан на рис. 8.11 *б*. Аналитическое выражение амплитуды, очевидно, имеет вид

$$\text{амплитуда} = \left|2a\cos\left(\frac{\Delta\omega}{2}t\right)\right|. \tag{8.87}$$

Функция (8.87) — периодическая функция с частотой, в два раза превышающей частоту выражения, стоящего под знаком модуля (на рис. 8.12 сопоставлены графики косинуса и его модуля), т. е. с частотой $\Delta\omega$. Таким образом, частота пульсаций амплитуды — ее называют **частотой биений** — равна разности частот складываемых колебаний.

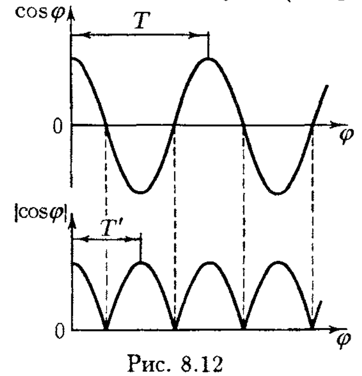


Рис. 8.12

Отметим, что множитель $2a\cos(\Delta\omega/2t)$ не только определяет амплитуду, но и влияет на фазу колебания. Это проявляется, например, в том, что отклонения, соответствующие соседним максимумам амплитуды, имеют противоположные знаки (см. точки M_1 и M_2 на рис. 8.11 *а*).

8.8. Сложение взаимно перпендикулярных колебаний

Допустим, что материальная точка может совершать колебания как вдоль оси x, так и вдоль перпендикулярной к ней оси y. Если возбудить оба колебания, материальная

точка будет двигаться по некоторой, вообще говоря, криволинейной траектории, форма которой зависит от разности фаз обоих колебаний.

Выберем начало отсчета времени так, чтобы начальная фаза первого колебания была равна нулю. Тогда уравнения колебаний запишутся следующим образом:

$$x = a\cos(\omega t), \quad y = b\cos(\omega t + \alpha), \tag{8.88}$$

где α — разность фаз обоих колебаний.

Выражения (8.88) представляют собой заданное в параметрической форме уравнение траектории, по которой движется тело, участвующее в обоих колебаниях. Чтобы получить уравнение траектории в обычном виде, нужно исключить из уравнений (8.88) параметр t. Из первого уравнения следует, что

$$\cos(\omega t) = \frac{x}{a}. \tag{8.89}$$

Следовательно,

$$\sin(\omega t) = \pm\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}. \tag{8.90}$$

Теперь развернем косинус во втором из уравнений (8.88) по формуле для косинуса суммы, подставляя при этом вместо $\cos(\omega t)$ и $\sin(\omega t)$ их значения (8.89) и (8.90). В результате получим

$$\frac{y}{b} = \frac{x}{a}\cos\alpha \mp \sin\alpha\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}.$$

Последнее уравнение после несложных преобразований можно привести к виду

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{2xy}{ab}\cos\alpha = \sin^2\alpha. \tag{8.91}$$

Уравнение (8.91) есть, вообще говоря, уравнение эллипса, оси которого повернуты относительно координатных осей x и y. Ориентация эллипса и значения его полуосей зависят довольно сложным образом от амплитуд a и b и разности фаз α.

Определим форму траектории для некоторых частных случаев.

1. Разность фаз α равна нулю. В этом случае уравнение (8.91) принимает вид

$$\left(\frac{x}{a} - \frac{y}{b}\right)^2 = 0,$$

откуда получается уравнение прямой

$$y = \frac{b}{a}x. \tag{8.92}$$

Результирующее движение является гармоническим колебанием вдоль этой прямой с частотой ω и амплитудой, равной $\sqrt{a^2 + b^2}$ (рис. 8.13).

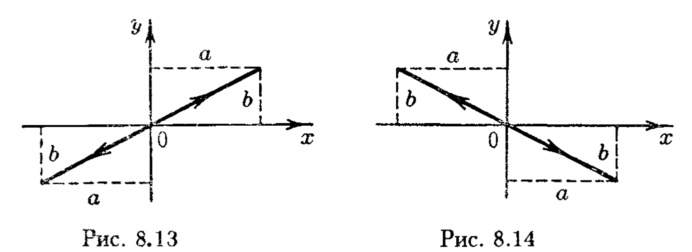


Рис. 8.13 Рис. 8.14

2. Разность фаз α равна $\pm\pi$. Уравнение (8.91) имеет вид

$$\left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b}\right)^2 = 0, \tag{8.93}$$

откуда получается, что результирующее движение представляет собой гармоническое колебание вдоль прямой (рис. 8.14)

$$y = -\frac{b}{a}x.$$

3. При $\alpha = \pm\pi/2$ уравнение (8.91) переходит в

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \tag{8.94}$$

т. е. в уравнение эллипса, приведенного к координатным осям, причем полуоси эллипса равны соответствующим амплитудам колебаний. При равенстве амплитуд a и b эллипс вырождается в окружность.

Случаи $\alpha = +\pi/2$ и $\alpha = -\pi/2$ различаются направлением движения по эллипсу или по окружности. Если $\alpha = +\pi/2$, уравнения (8.88) можно записать следующим образом:

$$x = a\cos(\omega t), \quad y = -b\sin(\omega t). \tag{8.95}$$

В момент $t = 0$ тело находится в точке *1* (рис. 8.15). В последующие моменты времени координата x уменьшается, а координата y становится отрицательной. Следовательно, движение совершается по часовой стрелке.

При $\alpha = -\pi/2$ уравнения колебаний имеют вид

$$x = a\cos(\omega t), \quad y = b\sin(\omega t). \tag{8.96}$$

Отсюда можно заключить, что движение происходит против часовой стрелки.

Из сказанного следует, что равномерное движение по окружности радиуса R с угловой скоростью ω может быть представлено как сумма двух взаимно перпендикулярных колебаний:

$$x = R\cos(\omega t), \quad y = \pm R\sin(\omega t) \tag{8.97}$$

(знак «+» в выражении для y соответствует движению против часовой стрелки, знак «−» — движению по часовой стрелке).

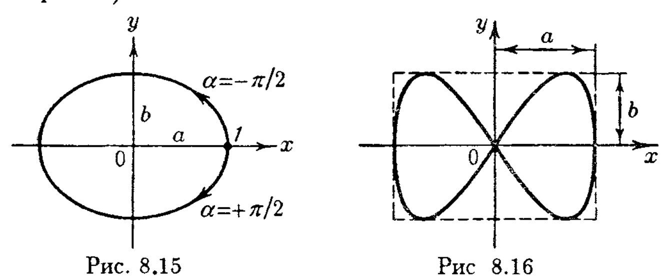


Рис. 8.15 Рис 8.16

В случае, когда частоты взаимно перпендикулярных колебаний различаются на очень малую величину $\Delta\omega$, их можно рассматривать как колебания одинаковой частоты, но с медленно изменяющейся разностью фаз. В самом деле, уравнения колебаний можно представить следующим образом:

$$x = a\cos(\omega t), \quad y = b\cos[\omega t + (\Delta\omega t + \alpha)],$$

и выражение $\Delta\omega t + \alpha$ рассматривать как разность фаз,

медленно изменяющуюся со временем по линейному закону.

Результирующее движение в этом случае происходит по медленно видоизменяющейся кривой, которая будет последовательно принимать форму, отвечающую всем значениям разности фаз от $-\pi$ до $+\pi$.

Если частоты взаимно перпендикулярных колебаний не одинаковы, то траектория результирующего движения имеет вид довольно сложных кривых, называемых *фигурами Лиссажу*[7]. На рис. 8.16 показана одна из простейших траекторий, получающаяся при отношении частот 1 : 2 и разности фаз $\pi/2$. Уравнения колебаний имеют вид

$$x = a\cos(\omega t), \quad y = b\cos(2\omega t + \pi/2).$$

За то время, пока вдоль оси x точка успевает переместиться из одного крайнего положения в другое, вдоль оси y, выйдя из нулевого положения, она успевает достигнуть одного крайнего положения, затем другого и вернуться в нулевое положение.

При отношении частот 1 : 2 и разности фаз, равной нулю, траектория вырождается в незамкнутую кривую (рис. 8.17), по которой точка движется туда и обратно. Чем ближе к единице рациональная дробь, выражающая отношение частот колебаний, тем сложнее оказывается фигура Лиссажу. На рис. 8.18 для примера показана кривая для отношения частот 3 : 4 и разности фаз $\pi/2$.

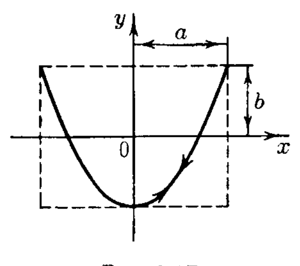


Рис. 8.17

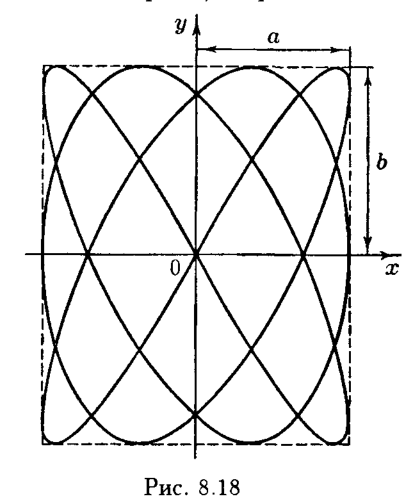


Рис. 8.18

[7]) Жюль Антуан Лиссажу (1822–1880) — французский физик.

Иногда фигурами Лиссажу называют также траектории (в частности, эллиптические кривые), получающиеся при равенстве частот складываемых колебаний.

8.9. Затухающие колебания

Затухающие колебания описываются уравнением

$$\ddot{x} + 2\beta\dot{x} + \omega_0^2 x = 0, \tag{8.98}$$

где

$$2\beta = r/m, \quad \omega_0^2 = k/m \tag{8.99}$$

(r — коэффициент сопротивления, т. е. коэффициент пропорциональности между скоростью $\dot{x}$ и силой сопротивления; k — коэффициент квазиупругой силы).

Отметим, что ω_0 представляет собой ту частоту, с которой совершались бы свободные колебания системы в отсутствие сопротивления среды (при $r = 0$). Эту частоту называют **собственной частотой** системы.

Подстановка в (8.98) функции $x = \exp(\lambda t)$ приводит к характеристическому уравнению

$$\lambda^2 + 2\beta\lambda + \omega_0^2 = 0. \tag{8.100}$$

Корни этого уравнения равны

$$\lambda_1 = -\beta + \sqrt{\beta^2 - \omega_0^2}, \quad \lambda_2 = -\beta - \sqrt{\beta^2 - \omega_0^2}. \tag{8.101}$$

При не слишком большом затухании (при $\beta < \omega_0$) подкоренное выражение будет отрицательным. Представим его в виде $(i\omega)^2$, где ω — вещественная величина, равная

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}. \tag{8.102}$$

Тогда корни характеристического уравнения запишутся следующим образом:

$$\lambda_1 = -\beta + i\omega, \quad \lambda_2 = -\beta - i\omega. \tag{8.103}$$

Согласно (8.38) общим решением уравнения (8.98) будет функция

$$x = C_1 \exp[(-\beta + i\omega)t] + C_2 \exp[(-\beta - i\omega)t] = \\ = \exp(-\beta t)\{C_1 \exp(i\omega t) + C_2 \exp(-i\omega t)\}.$$

Выражение в фигурных скобках аналогично выражению (8.51). Поэтому его можно представить в виде, аналогичном (8.55). Таким образом, при не слишком сильном затухании общее решение уравнения (8.98) имеет вид

$$x = a_0 \exp(-\beta t)\cos(\omega t + \alpha). \tag{8.104}$$

Здесь a_0 и α — произвольные постоянные, ω — величина, определяемая формулой (8.102). На рис. 8.19 дан график функции (8.104). Штриховыми линиями показаны пределы, в которых находится смещение колеблющейся точки x.

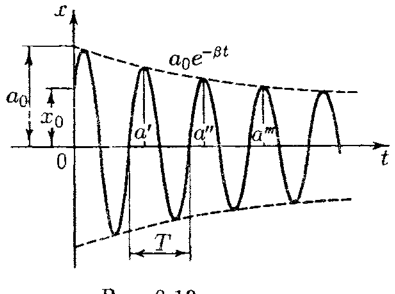


Рис. 8.19

В соответствии с видом функции (8.104) движение системы можно рассматривать как гармоническое колебание частоты ω с амплитудой, изменяющейся по закону $a(t) = a_0 \exp(-\beta t)$. Верхняя из штриховых кривых на рис. 8.19 дает график функции $a(t)$, причем величина a_0 представляет собой амплитуду в начальный момент времени. Начальное смещение x_0 зависит, кроме a_0, также от начальной фазы α: $x_0 = a_0 \cos\alpha$.

Скорость затухания колебаний определяется величиной $\beta = r/2m$, которую называют **коэффициентом затухания**. Найдем время τ, за которое амплитуда уменьшается в e раз. По определению

$$\exp(-\beta\tau) = \exp(-1),$$

откуда $\beta\tau = 1$. Следовательно, коэффициент затухания обратен по величине тому промежутку времени, за который амплитуда уменьшается в e раз.

Согласно формуле (8.56) период затухающих колебаний равен

$$T = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}}. \tag{8.105}$$

При незначительном сопротивлении среды ($\beta^2 \ll \omega_0^2$) период колебаний практически равен $T_0 = 2\pi/\omega_0$. С ростом коэффициента затухания период колебаний увеличивается.

Последующие наибольшие отклонения в какую-либо сторону (например, a', a'', a''' и т. д. на рис. 8.19) образуют геометрическую прогрессию. Действительно, если $a' = a_0 \exp(-\beta t)$, то

$$a'' = a_0 \exp[-\beta(t+T)] = a' \exp(-\beta T),$$
$$a''' = a_0 \exp[-\beta(t+2T)] = a'' \exp(-\beta T)$$

и т. д. Вообще отношение значений амплитуд, соответствующих моментам времени, различающимся на период, равно

$$a(t)/a(t+T) = \exp(\beta T).$$

Это отношение называют декрементом затухания, а его логарифм — логарифмическим декрементом затухания:

$$\lambda = \ln \frac{a(t)}{a(t+T)} = \beta T \tag{8.106}$$

(не путать с λ в формулах (8.100) и (8.103)!).

Для характеристики колебательной системы обычно используется логарифмический декремент затухания λ. Выразив в соответствии с (8.106) β через λ и T, можно закон убывания амплитуды со временем записать в виде

$$a = a_0 \exp\left(-\frac{\lambda}{T} t\right).$$

За время τ, за котрое амплитуда уменьшается в e раз, система успевает совершить $N_e = \tau/T$ колебаний. Из условия $\exp[-(\lambda/T)\tau] = \exp(-1)$ получается, что $\lambda(\tau/T) = \lambda N_e = 1$. Следовательно, логарифмический декремент затухания обратен по величине числу колебаний, совершаемых за то же время, за которое амплитуда уменьшается в e раз.

Для характеристики колебательной системы часто употребляется также величина

$$Q = \pi/\lambda = \pi N_e, \tag{8.107}$$

называемая добротностью колебательной системы. Как видно из ее определения, добротность пропорциональна числу колебаний N_e, совершаемых системой за то время τ, за которое амплитуда колебаний уменьшается в e раз.

Подстановка функции (8.104) и ее производной в выражение для полной энергии колеблющейся системы

$$E = kx^2/2 + m\dot{x}^2/2$$

приводит после преобразований к формуле

$$E = \frac{1}{2}ka_0^2 \exp(-2\beta t)\left[1 + \frac{\beta}{\omega_0}\sin(2\omega t + 2\alpha + \psi)\right], \tag{8.108}$$

где $\psi = \operatorname{arctg}(\beta/\omega)$. График этой функции изображен на рис. 8.20.

Убывание энергии обусловлено работой силы сопротивления среды $F_{\text{сопр}} = -r\dot{x}$. Мощность, развиваемая этой силой, равна $(-r\dot{x})(\dot{x}) = -r\dot{x}^2$. Таким образом,

$$\frac{dE}{dt} = -r\dot{x}^2.$$

Отсюда вытекает, что в тех точках кривой $E(t)$, где $\dot{x} = 0$, касательная к кривой параллельна оси t. В остальных точках $dE/dt < 0$.

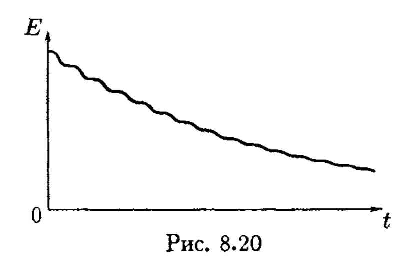


Рис. 8.20

При малом затухании ($\beta \ll \omega_0$) слагаемым, содержащим синус, в формуле (8.108) можно пренебречь и считать, что энергия изменяется по закону

$$E = E_0 \exp(-2\beta t), \tag{8.109}$$

где $E_0 = ka_0^2/2$ — значение энергии в начальный момент. К тому же результату можно прийти, если заменить определяемое формулой (8.108) мгновенное значение $E(t)$ его средним значением за время от $t - T/2$ до $t + T/2$ (T — период колебаний), вычисленным в предположении, что множитель $\exp(-2\beta t)$ в течение промежутка T остается постоянным.

Продифференцировав выражение (8.109) по t, получим скорость возрастания энергии системы:

$$\frac{dE}{dt} = -2\beta E_0 \exp(-2\beta t) = -2\beta E.$$

Изменив знак на обратный, найдем скорость убывания энергии:

$$-\frac{dE}{dt} = 2\beta E. \qquad (8.110)$$

Если энергия мало изменяется за время, равное периоду колебаний, убыль энергии за период можно найти, умножив выражение (8.110) на T:

$$-\Delta E = 2\beta T E$$

(напомним, что ΔE обозначает приращение, а $-\Delta E$ — убыль энергии). Наконец, приняв во внимание формулы (8.106) и (8.107), придем к соотношению

$$\frac{E}{(-\Delta E)} = \frac{Q}{2\pi},$$

из которого следует, что при слабом затухании колебаний добротность с точностью до множителя 2π равна отношению энергии, запасенной в системе в данной момент, к убыли этой энергии за один период колебаний.

Из формулы (8.105) следует, что с ростом коэффициента затухания период колебаний увеличивается. При $\beta = \omega_0$ период колебаний обращается в бесконечность, т. е. движение перестает быть периодическим.

При $\beta > \omega_0$ корни характеристического уравнения становятся вещественными (см. (8.101)) и решение дифференциального уравнения (8.98) оказывается равным сумме двух компонент:

$$x = C_1 \exp(-\lambda_1 t) + C_2 \exp(-\lambda_2 t).$$

Здесь C_1 и C_2 — вещественные постоянные, значения которых зависят от начальных условий (от x_0 и $v_0 = (\dot{x})_0$). Следовательно, движение носит апериодический (непериодический) характер — выведенная из положения равновесия система возвращается в положение равнове-

сия, не совершая колебаний. На рис. 8.21 показаны два возможных способа возвращения системы к положению равновесия при апериодическом движении. Каким из этих способов система приходит в положение равновесия, зависит от начальных условий. Движение, изображаемое кривой *2*, получается в том случае, когда система начинает двигаться из положения, характеризуемого смещением x_0, к положению равновесия с начальной скоростью v_0, определяемой условием

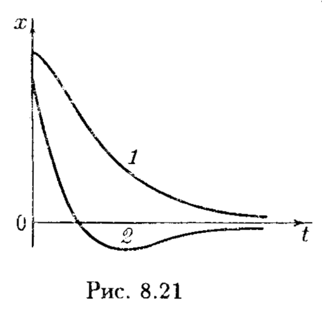


Рис. 8.21

$$|v_0| > |x_0|(\beta + \sqrt{\beta^2 - \omega_0^2}). \tag{8.111}$$

Это условие будет выполнено в том случае, если выведенной из положения равновесия системе сообщить достаточно сильный толчок к положению равновесия. Если, отведя систему из положения равновесия, отпустить ее без толчка (т. е. с $v_0 = 0$) или сообщить ей толчок недостаточной силы (такой, что v_0 окажется меньше определяемой условием (8.111)), движение будет происходить в соответствии с кривой *1* на рис. 8.21.

8.10. Автоколебания

При затухающих колебаниях энергия системы расходуется на преодоление сопротивления среды. Если восполнять эту убыль энергии, колебания станут незатухающими. Пополнение энергии системы может осуществляться за счет толчков извне, однако эти толчки должны сообщаться системе в такт с ее колебаниями, в противном случае они могут ослабить колебания и даже прекратить их совсем. Можно сделать так, чтобы колеблющаяся система сама управляла внешним воздействием, обеспечивая согласованность сообщаемых ей толчков со своим движением. Такая система называется **автоколебательной**, а совершаемые ею незатухающие колебания — **автоколебаниями**.

В качестве примера автоколебательной системы рассмотрим часовой механизм. Маятник часов насажен на одну ось с изогнутым рычагом — анкером (рис. 8.22). На концах анкера имеются выступы специальной формы,

называемые палеттами. Зубчатое ходовое колесо находится под воздействием цепочки с гирей или закрученной пружины, которые стремятся повернуть его по часовой стрелке. Однако большую часть времени колесо упирается одним из зубьев в боковую поверхность той либо иной палетты, скользящей при качании маятника по поверхности зуба. Только в моменты, когда маятник находится вблизи среднего положения, палетты перестают преграждать путь зубьям и ходовое колесо проворачивается, толкая анкер зубом, скользящим своей вершиной по скошенному торцу палетты. За полный цикл качаний маятника (за период) ходовое колесо проворачивается на два зуба, причем каждая из палетт получает по толчку.



Рис. 8.22

Посредством этих толчков за счет энергии поднятой гири или закрученной пружины и восполняется убыль энергии маятника, возникающая вследствие трения.

8.11. Вынужденные колебания

В случае, когда вынуждающая сила изменяется по гармоническому закону, колебания описываются дифференциальным уравнением

$$\ddot{x} + 2\beta\dot{x} + \omega_0^2 x = f_0 \cos(\omega t) \tag{8.112}$$

(см. (8.13)). Здесь β — коэффициент затухания, ω_0 — собственная частота системы (см. формулы (8.99)), $f_0 = F_0/m$ (F_0 — амплитуда вынуждающей силы), ω — частота силы.

Уравнение (8.112) является неоднородным. Согласно теореме (8.41) общее решение неоднородного уравнения равно сумме общего решения соответствующего однородного уравнения и частного решения неоднородного уравнения. Общее решение однородного уравнения мы уже знаем (см. функцию (8.104), являющуюся общим решением уравнения (8.98)). Оно имеет вид

$$x = a_0 \exp(-\beta t) \cos(\omega' t + \alpha), \tag{8.113}$$

где $\omega' = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}$, а a_0 и α — произвольные постоянные[8]).

Остается найти частное (не содержащее произвольных постоянных) решение уравнения (8.112). Воспользуемся для этого приемом, описанным в конце § 8.3. Прибавим к функции, стоящей в правой части уравнения (8.112), мнимую функцию $if_0 \sin(\omega t)$, после чего представим правую часть в виде $f_0 \exp(i\omega t)$ (см. формулу (8.24)). Таким образом, мы приходим к уравнению

$$\ddot{x} + 2\beta\dot{x} + \omega_0^2 x = f_0 \exp(i\omega t). \tag{8.114}$$

Это уравнение легче решить, чем уравнение (8.112), так как экспоненту проще дифференцировать и интегрировать, чем тригонометрические функции.

Попробуем искать частное решение уравнения (8.114) в виде

$$\hat{x} = \hat{a} \exp(i\omega t), \tag{8.115}$$

где $\hat{a}$ — некоторое комплексное число. Функция (8.115) также комплексная, что отмечено «шляпкой» над x. Продифференцировав эту функцию по t, получим

$$\dot{\hat{x}} = i\omega\hat{a} \exp(i\omega t), \quad \ddot{\hat{x}} = -\omega^2 \hat{a} \exp(i\omega t). \tag{8.116}$$

Подстановка выражений (8.115) и (8.116) в уравнение (8.114) приводит после сокращения на общий множитель $\exp(i\omega t)$ к алгебраическому уравнению

$$-\omega^2 \hat{a} + 2i\beta\omega\hat{a} + \omega_0^2 \hat{a} = f_0.$$

Отсюда

$$\hat{a} = \frac{f_0}{(\omega_0^2 - \omega^2) + 2i\beta\omega}. \tag{8.117}$$

Мы нашли значение $\hat{a}$, при котором функция (8.115) удовлетворяет уравнению (8.114). Представим комплексное число, стоящее в знаменателе, в показательной форме:

$$(\omega_0^2 - \omega^2) + 2i\beta\omega = \rho \exp(i\varphi). \tag{8.118}$$

[8]) Буквой ω без штриха мы обозначили частоту вынуждающей силы.

Согласно формулам (8.18)

$$\rho = \sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2\omega^2}, \quad \varphi = \operatorname{arctg}\frac{2\beta\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}. \tag{8.119}$$

Замена в (8.117) знаменателя в соответствии с (8.118) дает

$$\hat{a} = f_0/[\rho \exp(i\varphi)] = (f_0/\rho)\exp(-i\varphi).$$

Подставив это значение $\hat{a}$ в (8.115), получим частное решение уравнения (8.114):

$$\hat{x} = (f_0/\rho)\exp(-i\varphi)\exp(i\omega t) = (f_0/\rho)\exp[i(\omega t - \varphi)].$$

Наконец, взяв вещественную часть этой функции, получим частное решение уравнения (8.112):

$$x = (f_0/\rho)\cos(\omega t - \varphi).$$

Подстановка значения f_0, а также значений (8.119) для ρ и φ приводит к окончательному выражению:

$$x = \frac{F_0/m}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2\omega^2}}\cos\left(\omega t - \operatorname{arctg}\frac{2\beta\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}\right). \tag{8.120}$$

Отметим, что функция (8.120) не содержит произвольных постоянных.

Получим частное решение уравнения (8.112) еще одним способом — с помощью векторной диаграммы. Предположим, что частное решение уравнения (8.112) имеет вид

$$x = a\cos(\omega t - \varphi). \tag{8.121}$$

Тогда

$$\dot{x} = -\omega a \sin(\omega t - \varphi) = \omega a \cos(\omega t - \varphi + \pi/2), \tag{8.122}$$

$$\ddot{x} = -\omega^2 a \cos(\omega t - \varphi) = \omega^2 a \cos(\omega t - \varphi + \pi). \tag{8.123}$$

Подстановка выражений (8.121) — (8.123) в уравнение (8.112) приводит к соотношению

$$\omega^2 a\cos(\omega t - \varphi + \pi) + 2\beta\omega a\cos(\omega t - \varphi + \pi/2) + \\ + \omega_0^2 a\cos(\omega t - \varphi) = f_0\cos(\omega t). \tag{8.124}$$

Из (8.124) следует, что постоянные a и φ должны иметь такие значения, чтобы гармоническая функция $f_0 \cos(\omega t)$ была равна сумме трех гармонических функций, стоящих в левой части уравнения. Представим функции в виде векторов на векторной диаграмме (рис. 8.23 *а* соответствует случаю $\omega < \omega_0$, рис. 8.23 *б* — случаю $\omega > \omega_0$). Начальная фаза функции, стоящей справа в (8.124), равна нулю, поэтому она изображена вектором длины f_0, направленным вправо по горизонтальной оси. Тогда третье слагаемое левой части изобразится вектором длины $a\omega_0^2$, повернутым по часовой стрелке на угол φ (начальная фаза этого слагаемого отрицательна). Второе и первое слагаемые изобразятся векторами длины $2\beta a\omega$ и $a\omega^2$, повернутыми относительно третьего слагаемого против часовой стрелки на углы $\pi/2$ и π соответственно (см. § 8.6). Требуется подобрать значения a и φ так, чтобы векторы, изображающие функции, стоящие в левой части равенства, в сумме были равны вектору, изображающему

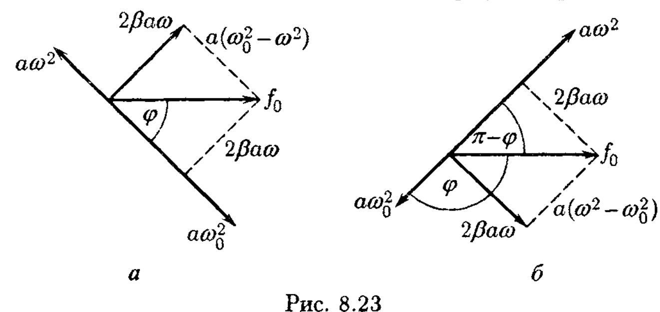


Рис. 8.23

функцию, стоящую в правой части (на рис. 8.23 это условие соблюдается). Из рисунка следует, что требуемое значение a определяется из соотношения

$$(\omega_0^2 - \omega^2)a^2 + 4\beta^2\omega^2 a^2 = f_0^2,$$

откуда

$$a = \frac{F_0/m}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2\omega^2}} \qquad (8.125)$$

(мы заменили f_0 отношением F_0/m). Из рис. 8.23 *б*, отвечающего случаю $\omega > \omega_0$, получается такое же значение a.

Рисунок 8.23 позволяет получить также и значение φ, которое представляет собой величину отставания по фазе вынужденного колебания (8.121) от обусловившей его вынуждающей силы. Из рисунка следует, что

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{2\beta\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}. \tag{8.126}$$

Подставив в (8.121) значения a и φ, определяемые формулами (8.125) и (8.126), получим функцию (8.120).

Функция (8.120) в сумме с (8.113) дает общее решение уравнения (8.112), описывающее поведение системы при вынужденных колебаниях. Слагаемое (8.113) играет заметную роль только в начальной стадии процесса, при так называемом установлении колебаний (рис. 8.24). С

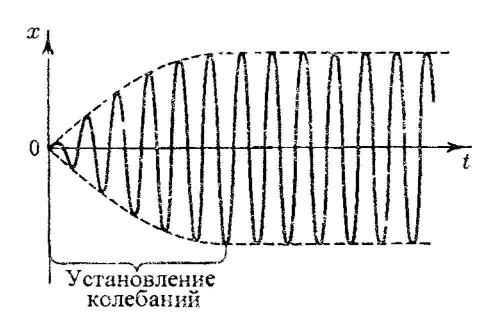


Рис. 8.24

течением времени из-за множителя $\exp(-\beta t)$ роль слагаемого (8.113) уменьшается, и по прошествии достаточного времени им можно пренебречь, сохраняя в решении лишь слагаемое (8.120).

Таким образом, функция (8.120) описывает установившиеся вынужденные колебания. Они представляют собой гармонические колебания с частотой, равной частоте вынуждающей силы. Амплитуда (8.125) вынужденных колебаний пропорциональна амплитуде вынуждающей силы. Для данной колебательной системы (определенных ω_0 и β) амплитуда зависит от частоты вынуждающей силы. Вынужденные колебания отстают по фазе от вынуждающей силы, причем величина отставания φ также зависит от частоты вынуждающей силы (см. (8.126)).

Зависимость амплитуды вынужденных колебаний от частоты вынуждающей силы приводит к тому, что при некоторой определенной для данной системы частоте амплитуда колебаний достигает максимального значения. Колебательная система оказывается особенно отзывчивой на действие вынуждающей силы при этой частоте. Это явление называется **резонансом**, а соответствующая частота — **резонансной частотой**.

Чтобы определить резонансную частоту $\omega_{\text{рез}}$, нужно найти максимум функции (8.125) или, что то же самое, минимум выражения, стоящего под корнем в знаменателе. Продифференцировав это выражение по ω и приравняв нулю, мы получим условие, определяющее $\omega_{\text{рез}}$:

$$-4(\omega_0^2 - \omega^2)\omega + 8\beta^2\omega = 0. \tag{8.127}$$

Уравнение (8.127) имеет три решения:

$$\omega = 0, \quad \omega = \pm\sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2}.$$

Решение, равное нулю, соответствует максимуму знаменателя. Из остальных двух решений отрицательное должно быть отброшено как не имеющее физического смысла (частота не может быть отрицательной). Таким образом, для резонансной частоты получается одно значение:

$$\omega_{\text{рез}} = \sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2}. \tag{8.128}$$

Подставив это значение частоты в (8.125), получим выражение для амплитуды при резонансе:

$$a_{\text{рез}} = \frac{F_0/m}{2\beta\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}}. \tag{8.129}$$

Из (8.129) следует, что при отсутствии сопротивления среды амплитуда при резонансе обращалась бы в бесконечность. Согласно (8.128) резонансная частота при тех же условиях (при $\beta = 0$) совпадает с собственной частотой колебаний системы ω_0.

Зависимость амплитуды вынужденных колебаний от частоты вынуждающей силы (или, что то же самое, от частоты колебаний) показана графически на рис. 8.25. Отдельные кривые на графике соответствуют различным значениям параметра β. В соответствии с (8.128) и

(8.129), чем меньше β, тем выше и правее лежит максимум данной кривой. При очень большом затухании (таком, что $2\beta^2 > \omega_0^2$) выражение для резонансной частоты становится мнимым. Это означает, что при этих условиях резонанс не наблюдается — с увеличением частоты амплитуда вынужденных колебаний монотонно убывает (см. нижнюю кривую на рис. 8.25). Изображенная на рис. 8.25 совокупность графиков функции (8.125), соответствующих различным значениям параметра β, называется резонансными кривыми.

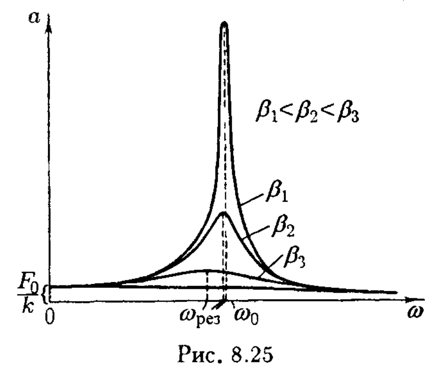


Рис. 8.25

По поводу резонансных кривых можно сделать еще следующие замечания. При стремлении ω к нулю все кривые приходят к одному и тому же, отличному от нуля предельному значению, равному $F_0/(m\omega_0^2)$, т. е. F_0/k. Это значение представляет собой смещение из положения равновесия, которое получает система под действием постоянной силы F_0. При стремлении ω к бесконечности все кривые асимптотически стремятся к нулю, так как при большой частоте сила так быстро изменяет свое направление, что система не успевает заметно сместиться из положения равновесия. Наконец, отметим, что чем меньше β, тем сильнее изменяется с частотой амплитуда вблизи резонанса, тем «острее» получается максимум.

Из формулы (8.129) вытекает, что при малом затухании (т. е. при $\beta \ll \omega_0$) амплитуда при резонансе приближенно равна

$$a_{\text{рез}} \approx F_0/2m\beta\omega_0.$$

Разделим это выражение на смещение x_0 от положения равновесия под действием постоянной силы F_0, равное $F_0/(m\omega_0^2)$. В результате получим

$$\frac{a_{\text{рез}}}{x_0} \approx \frac{\omega_0}{2\beta} = \frac{2\pi}{2\beta T} = \frac{\pi}{\lambda} = Q \qquad (8.130)$$

(см. формулу (8.107)). Таким образом, добротность Q показывает, во сколько раз амплитуда в момент резонанса

превышает смещение системы из положения равновесия под действием постоянной силы той же величины, что и амплитуда вынуждающей силы (это справедливо лишь при небольшом затухании).

Из рис. 8.23 видно, что вынужденные колебания отстают по фазе от вынуждающей силы, причем величина отставания φ лежит в пределах от 0 до π. Зависимость φ от ω при разных значениях β показана графически на рис. 8.26. Частоте ω_0 соответствует $\varphi = \pi/2$. Резонансная частота меньше собственной (см. (8.128)). Следовательно, в момент резонанса $\varphi < \pi/2$. При слабом затухании $\omega_{\text{рез}} \approx \omega_0$, и значение φ при резонансе можно считать равным $\pi/2$.

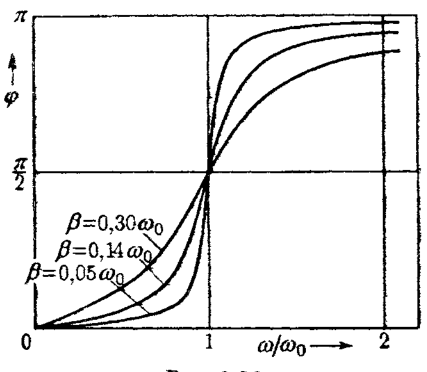


Рис. 8.26

С явлением резонанса приходится считаться при конструировании машин и различного рода сооружений. Собственная частота колебаний этих устройств ни в коем случае не должна быть близка к частоте возможных внешних воздействий. Так, например, собственная частота вибраций корпуса корабля или крыльев самолета должна сильно отличаться от частоты колебаний, которые могут быть возбуждены вращением гребного винта или пропеллера. В противном случае возникают вибрации, которые могут вызвать катастрофу. Известны случаи, когда обрушивались мосты при прохождении по ним марширующих колонн солдат. Это происходило потому, что собственная частота колебаний моста оказывалась близкой к частоте, с которой шагала колонна. Вместе с тем явление резонанса часто оказывается весьма полезным, особенно в акустике, радиотехнике и т. д.

8.12. Параметрический резонанс

В рассмотренном в предыдущем параграфе случае приложенная извне вынуждающая сила обусловливала непосредственно смещение системы из положения равновесия. Оказывается, существует иной вид воздействия извне, с помощью которого можно сильно раскачать систему. Этот вид воздействия заключается в совершаемом в такт с колебаниями периодическом изменении какого-либо параметра системы, вследствие чего само явление называется параметрическим резонансом.

Возьмем для примера простейший маятник — шарик на нитке. Если периодически изменять длину маятника l, увеличивая ее в моменты, когда маятник находится в крайних положениях, и уменьшая в моменты, когда маятник находится в среднем положении (рис. 8.27), то маятник сильно раскачается. Увеличение энергии маятника при этом происходит за счет работы, которую совершает сила, действующая на нить. Сила натяжения нити при колебаниях маятника не постоянна: она меньше в крайних положениях, когда скорость обращается в нуль, и больше в среднем положении, когда скорость маятника максимальна. Поэтому отрицательная работа внешней силы при удлинении маятника оказывается меньше по величине, чем положительная работа, совершаемая при укорочении маятника. В итоге работа внешней силы за период оказывается больше нуля.

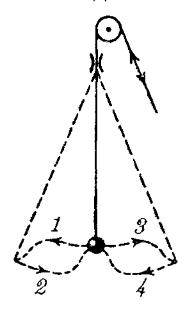


Рис. 8.27

Глава 9

Гидродинамика

9.1. Линии и трубки тока. Неразрывность струи

Кроме механики материальной точки и механики твердого тела, которые рассматривались в предыдущих главах, существует еще механика сплошных сред. Эта наука охватывает гидродинамику, газовую динамику, теорию упругости [1] и ряд других дисциплин, рассматривающих вещество как непрерывную среду. Гидродинамика представляет собой раздел механики сплошных сред, в котором изучаются движение несжимаемых жидкостей и взаимодействие несжимаемых жидкостей с твердыми телами.

Чтобы описать движение жидкости, можно задать положение каждой частицы жидкости как функцию времени. Такой способ описания разрабатывался Лагранжем [2]. Но можно следить не за частицами жидкости, а за отдельными точками пространства и отмечать скорость, с которой проходят через каждую данную точку отдельные частицы жидкости. Второй способ называется методом Эйлера [3].

Состояние движения жидкости можно определить, указав для каждой точки пространства вектор скорости как функцию времени. Совокупность векторов $\mathbf{v}$, заданных для всех точек пространства, образует так называемое поле вектора скорости, которое можно изобразить следующим образом. Проведем в движущейся жидкости линии так, чтобы касательная к ним в каждой точке совпадала по направлению с вектором $\mathbf{v}$ (рис. 9.1). Эти линии называются линиями тока. Условимся проводить линии тока так, чтобы густота их (которая характеризу-

---

[1]) Некоторые вопросы теории упругости затрагивались в § 2.9 и 3.8.

[2]) Жозеф Луи Лагранж (1736–1813) — французский математик и механик.

[3]) Леонард Эйлер (1707–1783) — математик, механик, физик и астроном, по происхождению швейцарец, с 1727 по 1741 г. и с 1766 по 1783 г. жил и работал в России.

ется отношением числа линий ΔN к величине перпендикулярной к ним площадки ΔS, через которую они проходят) была пропорциональна модулю скорости в данном месте. Тогда по картине линий тока можно будет судить не только о направлении, но и о модуле вектора **v** в разных точках пространства: там, где скорость больше, линии тока будут гуще и, наоборот, где скорость меньше, линии тока будут реже.

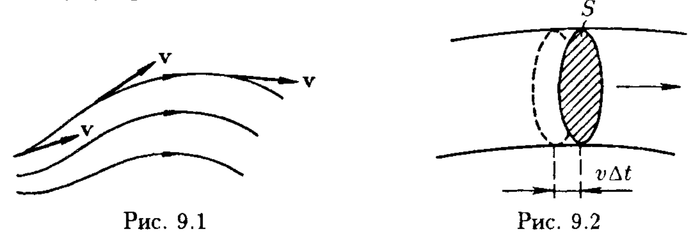


Рис. 9.1 Рис. 9.2

Поскольку модуль и направление вектора **v** в каждой точке могут меняться со временем, то и картина линий тока может непрерывно меняться. Если вектор скорости в каждой точке пространства остается постоянным, то течение называется установившимся или стационарным. При стационарном течении любая частица жидкости проходит данную точку пространства с одним и тем же значением **v**. Картина линий тока при стационарном течении остается неизменной, и линии тока в этом случае совпадают с траекториями частиц.

Часть жидкости, ограниченная линиями тока, называется трубкой тока. Вектор **v**, будучи в каждой точке касательным к линии тока, будет касательным и к поверхности трубки тока; следовательно, частицы жидкости при своем движении не пересекают стенок трубки тока.

Возьмем перпендикулярное к направлению скорости сечение трубки тока S (рис. 9.2). Предположим, что скорость движения частиц жидкости одинакова во всех точках этого сечения. За время Δt через сечение S пройдут все частицы, расстояние которых от S в начальный момент не превышает значения $v\Delta t$. Следовательно, за время Δt через сечение S пройдет объем жидкости, равный $Sv\Delta t$, а за единицу времени через сечение S пройдет объем жидкости, равный Sv. Возьмем трубку тока, настолько тонкую, что в каждом ее сечении скорость можно считать постоянной. Если жидкость несжимаема (т. е. плотность ее всюду одинакова и изменяться не может), то

количество жидкости между сечениями S_1 и S_2 (рис. 9.3) будет оставаться неизменным. Отсюда следует, что объемы жидкости, протекающие за единицу времени через сечения S_1 и S_2, должны быть одинаковы:

$$S_1 v_1 = S_2 v_2$$

(напомним, что через боковую поверхность трубки тока частицы жидкости не проходят).

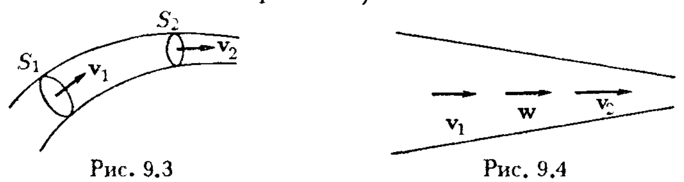


Рис. 9.3 Рис. 9.4

Приведенное выше рассуждение применимо к любой паре сечений S_1 и S_2. Следовательно, *для несжимаемой жидкости величина Sv в любом сечении одной и той же трубки тока должна быть одинакова*:

$$Sv = \text{const}. \tag{9.1}$$

Полученный нами результат представляет собой содержание теоремы о неразрывности струи.

Из (9.1) следует, что при переменном сечении трубки тока частицы несжимаемой жидкости движутся с ускорением. В горизонтальной трубке тока (рис. 9.4) это ускорение может быть обусловлено только непостоянством давления вдоль оси трубки — в местах, где скорость меньше, давление должно быть больше, и наоборот. Количественная связь между скоростью течения и давлением будет установлена в следующем параграфе.

Теорема о неразрывности струи применима к реальным жидкостям и даже к газам в том случае, когда сжимаемостью их можно пренебречь. Соответствующий расчет показывает, что при движении жидкостей и газов со скоростями, меньшими скорости звука, их с достаточной степенью точности можно считать несжимаемыми.

9.2. Уравнение Бернулли[4])

Рассматривая движение жидкостей, во многих случаях можно считать, что перемещение одних частей жидкости относительно других не связано с возникновением сил тре-

[4]) Даниил Бернулли (1700–1782) — швейцарский ученый.

ния. Жидкость, в которой внутреннее трение (вязкость) полностью отсутствует, называется **идеальной**.

Выделим в стационарно текущей идеальной жидкости трубку тока малого сечения (рис. 9.5). Рассмотрим объем жидкости, ограниченный стенками трубки тока и перпендикулярными к линиям тока сечениями S_1 и S_2. За время Δt этот объем переместится вдоль трубки тока, причем сечение S_1 переместится в положение S_1', пройдя путь Δl_1, сечение S_2 переместится в положение S_2', пройдя путь Δl_2. В силу неразрывности струи заштрихованные объемы будут иметь одинаковую величину:

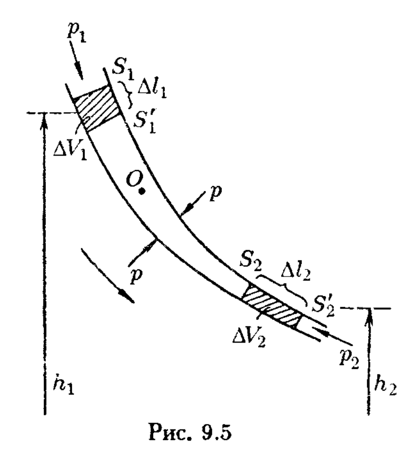


Рис. 9.5

$$\Delta V_1 = \Delta V_2 = \Delta V.$$

Энергия каждой частицы жидкости слагается из ее кинетической энергии и потенциальной энергии в поле сил земного тяготения. Вследствие стационарности течения частица, находящаяся спустя время Δt в любой из точек незаштрихованной части рассматриваемого объема (см., например, точку O на рис. 9.5), имеет такую же скорость (а следовательно, и кинетическую энергию), какую имела частица, находившаяся в той же точке в начальный момент времени. Поэтому приращение энергии ΔE всего рассматриваемого объема можно вычислить как разность энергий заштрихованных объемов ΔV_2 и ΔV_1.

Возьмем сечение трубки тока и отрезки Δl настолько малыми, чтобы всем точкам каждого из заштрихованных объемов можно было приписать одно и то же значение скорости v, давления p и высоты h. Тогда приращение энергии запишется следующим образом:

$$\Delta E = \left(\frac{\rho \Delta V v_2^2}{2} + \rho \Delta V g h_2\right) - \left(\frac{\rho \Delta V v_1^2}{2} + \rho \Delta V g h_1\right) \tag{9.2}$$

(ρ — плотность жидкости).

В идеальной жидкости силы трения отсутствуют. Поэтому приращение энергии (9.2) должно равняться работе, совершаемой над выделенным объемом силами давления. Силы давления на боковую поверхность перпендикулярны в каждой точке к направлению перемещения частиц, к которым они приложены, вследствие чего работы не совершают. Отлична от нуля лишь работа сил, приложенных к сечениям S_1 и S_2. Эта работа равна

$$A = p_1 S_1 \Delta l_1 - p_2 S_2 \Delta l_2 = (p_1 - p_2)\Delta V. \tag{9.3}$$

Приравняв выражения (9.2) и (9.3), сократив на ΔV и перенеся члены с одинаковыми индексами в одну часть равенства, получим

$$\frac{\rho v_1^2}{2} + \rho g h_1 + p_1 = \frac{\rho v_2^2}{2} + \rho g h_2 + p_2. \tag{9.4}$$

Сечения S_1 и S_2 были взяты совершенно произвольно. Поэтому можно утверждать, что в любом сечении трубки тока выражение $\rho v^2/2 + \rho g h + p$ имеет одинаковое значение. В соответствии со сделанными нами при его выводе предположениями уравнение (9.4) становится вполне точным лишь при стремлении поперечного сечения S к нулю, т. е. при стягивании трубки тока в линию. Таким образом, величины p, v и h, фигурирующие в левой и правой частях уравнения (9.4), следует рассматривать как относящиеся к двум произвольным точкам одной и той же линии тока.

Полученный нами результат можно сформулировать следующим образом: *в стационарно текущей идеальной жидкости вдоль любой линии тока выполняется условие*

$$\frac{\rho v^2}{2} + \rho g h + p = \text{const}. \tag{9.5}$$

Уравнение (9.5) или равнозначное ему уравнение (9.4) называется у р а в н е н и е м Б е р н у л л и. Несмотря на то что это уравнение было получено нами для идеальной жидкости, оно достаточно хорошо выполняется для реальных жидкостей, внутреннее трение в которых не очень велико.

Для горизонтальной линии тока условие (9.4) принимает вид

$$\frac{\rho v_1^2}{2} + p_1 = \frac{\rho v_2^2}{2} + p_2,$$

т. е. давление оказывается меньшим в тех точках, где скорость больше (качественно это уже было показано в предыдущем параграфе).

Уменьшение давления в точках, где скорость потока больше, положено в основу устройства водоструйного насоса (рис. 9.6). Струя воды подается в трубку, открывающуюся в атмосферу, так что на выходе из трубки давление равно атмосферному. В трубке имеется сужение, по которому вода идет с большей скоростью, вследствие чего давление в этом месте оказывается меньше атмосферного. Такое же давление устанавливается и в охватывающей трубку камере насоса, которая сообщается с трубкой через разрыв, имеющийся в узкой части трубки. Подсоединив к камере насоса откачиваемый объем, из него можно откачать воздух (или какой-либо другой газ) до давления порядка 100 мм рт. ст. Откачиваемый воздух захватывается струей воды и уносится в атмосферу.

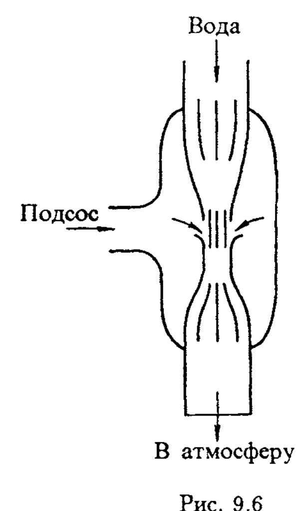


Рис. 9.6

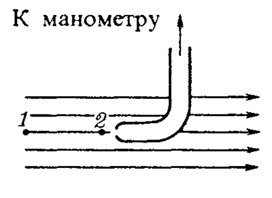


Рис. 9.7

Чтобы измерить давление в текущей жидкости, нужно ввести в нее трубку, соединенную с манометром. Допустим, что в жидкость введена изогнутая манометрическая трубка с входным отверстием, обращенным навстречу потоку (рис. 9.7). Такая трубка называется *трубкой Пито*[5]. Трубка нарушает характер движения жидкости. В частности, вдоль линии тока, упирающейся своим концом в центр отверстия трубки, скорость будет изменяться от значения v для невозмущенного потока на большом расстоянии от трубки до нуля непосредственно перед отверстием.

[5]) Анри Пито (1695–1771) — французский геометр и инженер.

Напишем уравнение (9.4) для точек *1* и *2* упирающейся в отверстие линии тока (см. рис. 9.7), приняв во внимание, что $h_1 = h_2$ и $v_2 = 0$:

$$p_1 + \frac{\rho v^2}{2} = p_2.$$

Здесь p_1 равно давлению p в невозмущенном потоке, p_2 равно давлению $p_{\text{полн}}$, измеряемому манометром. Следовательно, манометр покажет давление

$$p_{\text{полн}} = p + \frac{\rho v^2}{2}. \tag{9.6}$$

Давление p в невозмущенном потоке называют статическим. Давление $p_{\text{полн}}$ называют полным. Слагаемое $\rho v^2/2$ называют динамическим давлением. Трубка Пито измеряет полное давление.

Теперь введем в поток изогнутую трубку с закрытым концом и боковыми отверстиями (рис. 9.8). Такая трубка назывется зондом. Скорость жидкости вблизи отверстий (а следовательно, и давление) будет мало отличаться от скорости (и давления) в невозмущенном потоке. Поэтому манометр, присоединенный к зонду, покажет статическое давление p.

Прандтль[6]) усовершенствовал трубку Пито, соединив ее с зондом (рис. 9.9) и присоединив к дифференциальному манометру (т. е. манометру, измеряющему разность давлений). Показания манометра непосредственно дают разность полного и статического давле-

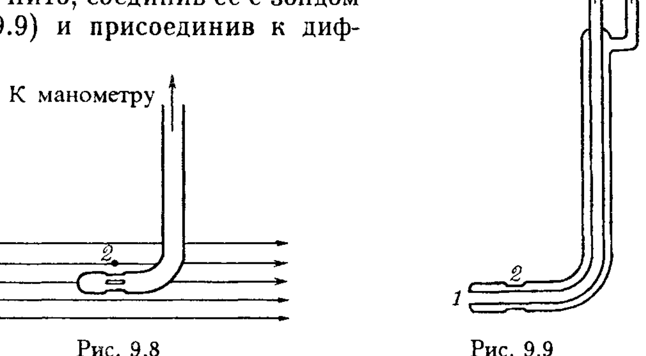


Рис. 9.8 Рис. 9.9

[6]) Людвиг Прандтль (1875–1953) — немецкий ученый в области гидро- и газодинамики.

ний, т. е. динамическое давление $\rho v^2/2$. Для заданной плотности жидкости манометр можно проградуировать в значениях скорости. Таким образом, **трубка Пито–Прандтля** может служить прибором для измерения скорости течения жидкости (или газа).

9.3. Истечение жидкости из отверстия

Применим уравнение Бернулли к случаю истечения жидкости из небольшого отверстия в широком открытом сосуде. Выделим в жидкости трубку тока, имеющую своим сечением с одной стороны открытую поверхность жидкости в сосуде, а с другой стороны — отверстие, через которое жидкость вытекает [7] (рис. 9.10). В каждом из этих сечений скорость и высоту над некоторым исходным уровнем можно считать одинаковыми, вследствие чего к ним можно применить уравнение (9.4), полученное при этом предположении. Далее, давления в обоих сечениях равны атмосферному и поэтому одинаковы. Кроме того, скорость перемещения открытой поверхности в широком сосуде можно положить равной нулю. С учетом всего сказанного уравнение (9.4) применительно к данному случаю можно написать в виде

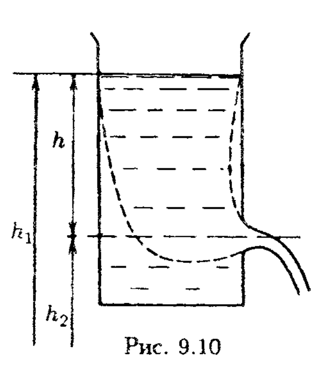


Рис. 9.10

$$\rho g h_1 = \frac{\rho v^2}{2} + \rho g h_2,$$

где v — скорость истечения из отверстия. Сократив на ρ и введя $h = h_1 - h_2$ — высоту открытой поверхности жидкости над отверстием, получим $v^2/2 = gh$, откуда

$$v = \sqrt{2gh}. \tag{9.7}$$

Эта формула называется **формулой Торричелли** [8].

[7]) Точнее, сечение струи при выходе из отверстия. Если не принять специальных мер, то сечение струи будет меньше отверстия.

[8]) Эванджелиста Торричелли (1608–1647) — итальянский физик и математик.

Итак, скорость истечения жидкости из отверстия, расположенного на глубине h под открытой поверхностью, совпадает со скоростью, которую приобретает любое тело, падая с высоты h. Следует помнить, что этот результат получен в предположении, что жидкость идеальна. Для реальных жидкостей скорость истечения будет меньше, причем тем сильнее отличается от значения (9.7), чем больше вязкость жидкости.

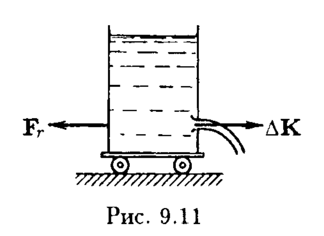


Рис. 9.11

Струя жидкости, вытекающая из отверстия в сосуде (рис. 9.11), уносит с собой за время Δt импульс $\Delta\mathbf{K} = \rho S v \mathbf{v} \Delta t$ (ρ — плотность жидкости, S — площадь отверстия, $\mathbf{v}$ — скорость истечения струи). Этот импульс сообщается вытекающей жидкости сосудом. По третьему закону Ньютона сосуд получает от вытекающей жидкости за время Δt импульс, равный $-\Delta\mathbf{K}$, т. е. испытывает действие силы

$$\mathbf{F}_r = -\frac{\Delta\mathbf{K}}{\Delta t} = -\rho S v \mathbf{v}. \tag{9.8}$$

Эта сила называется **реакцией вытекающей струи**. Если сосуд поставить на тележку, то под действием силы $\mathbf{F}_r$ он придет в движение в направлении, противоположном направлению струи.

Найдем значение силы $\mathbf{F}_r$, воспользовавшись выражением (9.7) для скорости истечения жидкости из отверстия:

$$F_r = \rho S v^2 = 2gh\rho S. \tag{9.9}$$

Если бы, как это может показаться на первый взгляд, сила $\mathbf{F}_r$ совпадала по модулю с силой гидростатического давления, которое жидкость оказывала бы на пробку, закрывающую отверстие, то F_r была бы равна $gh\rho S$. На самом деле сила $\mathbf{F}_r$ оказывается в два раза большей. Это объясняется тем, что возникающее при вытекании струи движение жидкости в сосуде приводит к перераспределению давления, причем давление вблизи стенки, лежащей против отверстия, оказывается несколько большим, чем вблизи стенки, в которой сделано отверстие.

На реакции вытекающей струи газа основано действие реактивных двигателей и ракет. Реактивное движение,

не нуждаясь для своего осуществления в наличии атмосферы, используется для полетов в космическом пространстве.

Основоположником теории межпланетных сообщений является Циолковский [9]). Он дал теорию полета ракеты и обосновал возможность применения реактивных аппаратов для межпланетных сообщений. В частности, Циолковским была разработана теория движения составных ракет, в которых каждая последующая ступень вступает в действие после того, как предыдущая ступень, полностью израсходовав топливо, отделится от ракеты.

9.4. Силы внутреннего трения

Идеальная жидкость, т. е. жидкость без трения, является абстракцией. Всем реальным жидкостям и газам в большей или меньшей степени присуща вязкость, или внутреннее трение. Вязкость проявляется в том, что возникшее в жидкости или газе движение после прекращения действия причин, его вызвавших, постепенно прекращается.

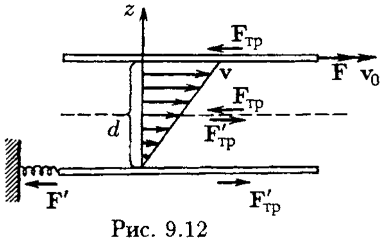


Рис. 9.12

Для выяснения закономерностей, которым подчиняются силы внутреннего трения, рассмотрим следующий опыт. В жидкость погружены две параллельные друг другу пластины (рис. 9.12), линейные размеры которых значительно превосходят расстояние между ними (d). Нижняя пластина удерживается на месте, верхняя приводится в движение относительно нижней с некоторой скоростью v_0. Опыт дает, что для перемещения верхней пластины с постоянной скоростью v_0 необходимо действовать на нее с вполне определенной постоянной по модулю силой $\mathbf{F}$. Раз пластина не получает ускорения, значит, действие этой силы уравновешивается равной ей по модулю противоположно направленной силой, которая, очевидно, есть сила трения, действующая на пластину при ее движении в жидкости. Обозначим ее буквой $\mathbf{F}_{тр}$.

[9]) Константин Эдуардович Циолковский (1857–1935) — русский ученый и изобретатель.

Варьируя скорость пластины v_0, площадь пластин S и расстояние между ними d, можно получить, что

$$F_{\text{тр}} = \eta \frac{v_0}{d} S, \tag{9.10}$$

где η — коэффициент пропорциональности, зависящий от природы и состояния (например, температуры) жидкости и называемый коэффициентом внутреннего трения, или просто вязкостью жидкости (газа).

Нижняя пластина при движении верхней также оказывается подверженной действию силы $\mathbf{F}'_{\text{тр}}$, равной по модулю $\mathbf{F}_{\text{тр}}$. Для того чтобы нижняя пластина оставалась неподвижной, силу $\mathbf{F}'_{\text{тр}}$ необходимо уравновесить с помощью силы $\mathbf{F}'$.

Таким образом, при движении двух погруженных в жидкость пластин относительно друг друга между ними возникает взаимодействие, характеризуемое силой (9.10). Воздействие пластин друг на друга осуществляется, очевидно, через жидкость, заключенную между пластинами, передаваясь от одного слоя жидкости к другому. Если в любом месте зазора провести мысленно плоскость, параллельную пластинам (см. штриховую линию на рис. 9.12), то можно утверждать, что часть жидкости, лежащая над этой плоскостью, действует на часть жидкости, лежащую под плоскостью, с силой $\mathbf{F}'_{\text{тр}}$, а часть жидкости, лежащая под плоскостью, в свою очередь действует на часть жидкости, лежащую над плоскостью, с силой $\mathbf{F}_{\text{тр}}$, причем значения $\mathbf{F}_{\text{тр}}$ и $\mathbf{F}'_{\text{тр}}$ определяются формулой (9.10). Таким образом, формула (9.10) определяет не только силу трения, действующую на пластины, но и силу трения между соприкасающимися частями жидкости.

Если исследовать скорость частиц жидкости в разных слоях, то оказывается, что она изменяется в направлении z, перпендикулярном к пластинам (рис. 9.12), по линейному закону

$$v(z) = \frac{v_0}{d} z. \tag{9.11}$$

Частицы жидкости, непосредственно соприкасающиеся с пластинами, как бы прилипают к ним и имеют такую же скорость, как и сами пластины. Согласно формуле (9.11)

$$\left|\frac{dv}{dz}\right| = \frac{v_0}{d}. \tag{9.12}$$

Знак модуля мы поставили по следующей причине. Если бы мы закрепили верхнюю пластину, а двигали нижнюю (см. рис. 9.12), или изменили направление оси z на обратное, производная dv/dz стала бы отрицательной. Величина же v_0/d всегда положительна. Поэтому для того, чтобы формула (9.12) была справедлива в любом случае, нужно взять модуль dv/dz.

Использовав равенство (9.12), формуле (9.10) можно придать вид

$$F_{\text{тр}} = \eta \left|\frac{dv}{dz}\right| S. \tag{9.13}$$

Эта формула определяет модуль силы трения. Величина $|dv/dz|$ показывает, как быстро изменяется скорость в направлении оси z, и представляет собой модуль градиента модуля скорости (если v зависит только от z, $\partial v/\partial x = \partial v/\partial y = 0$, $\partial v/\partial z = dv/dz$).

Формула (9.13) получена нами для случая, когда скорость изменяется по линейному закону. Оказывается, что эта формула остается справедливой и для любого другого закона изменения скорости от слоя к слою. В этом случае для определения силы трения между двумя граничащими друг с другом слоями нужно брать значение $|dv/dz|$ в том месте, где проходит воображаемая поверхность раздела слоев.

Все сказанное в этом параграфе относится не только к жидкостям, но и к газам.

Единицей вязкости в СИ служит такая вязкость, при которой градиент скорости с модулем, равным 1 м/с на 1 м, приводит к возникновению силы внутреннего трения в 1 Н на 1 м^2 поверхности касания слоев. Эта единица называется паскаль-секундой (обозначается Па·с) [10]).

В СГС-системе единицей вязкости является пуаз (П), равный такой вязкости, при которой градиент скорости с модулем, равным 1 см/с на 1 см, приводит к возникновению силы внутреннего трения в 1 дин на 1 см^2 поверхности касания слоев. Единица, равная 10^{-6} П, называется микропуазом (мкП). Между пуазом и паскаль-секундой имеется соотношение

$$1\,\text{Па}\cdot\text{с} = 10\,\text{П}.$$

[10]) Паскалем называется единица давления в СИ (1 Па = 1 Н/м^2).

Коэффициент вязкости зависит от температуры, причем характер этой зависимости существенно различен для жидкостей и газов. У жидкостей коэффициент вязкости сильно уменьшается с повышением температуры. У газов, напротив, коэффициент вязкости с температурой растет. Различие в характере поведения η при изменениях температуры указывает на различие механизма внутреннего трения в жидкостях и газах.

9.5. Ламинарное и турбулентное течения

Наблюдается два вида течения жидкости (или газа). В одних случаях жидкость как бы разделяется на слои, которые скользят относительно друг друга не перемешиваясь. Такое течение называется *ламинарным*[11]) (слоистым). Если в ламинарный поток ввести подкрашенную струйку, то она сохраняется, не размываясь, на всей длине потока, так как частицы жидкости в ламинарном потоке не переходят из одного слоя в другой. Ламинарное течение стационарно.

При увеличении скорости или поперечных размеров потока характер течения существенным образом изменяется. Возникает энергичное перемешивание жидкости. Такое течение называется *турбулентным*. При турбулентном течении скорость частиц в каждом данном месте все время изменяется беспорядочным образом — течение нестационарно. Если в турбулентный поток ввести окрашенную струйку, то уже на небольшом расстоянии от места ее введения окрашенная жидкость равномерно распределяется по всему сечению потока.

Рейнольдс[12]) установил, что характер течения зависит от значения безразмерной величины

$$\mathrm{Re} = \rho v l / \eta, \tag{9.14}$$

где ρ — плотность жидкости (или газа), v — средняя (по сечению трубы) скорость потока, η — коэффициент вязкости жидкости, l — характерный для поперечного сечения размер, например сторона квадрата при квадратном сечении, радиус или диаметр при круглом сечении и т. д.

Величина (9.14) называется *числом Рейнольдса*. При малых значениях числа Рейнольдса наблюдается

[11]) Латинское «lamina» означает «пластинка», «полоска».

[12]) Осборн Рейнольдс (1842–1912) — английский физик.

ламинарное течение. Начиная с некоторого определенного значения Re, называемого критическим, течение приобретает турбулентный характер. Если в качестве характерного размера для круглой трубы взять ее радиус r, то критическое значение числа Рейнольдса (которое в этом случае имеет вид $\mathrm{Re} = \rho v r/\eta$) оказывается равным [13]) примерно 1000. В число Рейнольдса входят в виде отношения две величины, зависящие от свойств жидкости: плотность ρ и коэффициент вязкости η. Отношение

$$\nu = \eta/\rho \tag{9.15}$$

называется **кинематической вязкостью**. В отличие от ν величина η называется **динамической вязкостью**. Используя кинематическую вязкость, числу Рейнольдса можно придать следующий вид:

$$\mathrm{Re} = vl/\nu. \tag{9.16}$$

Число Рейнольдса может служить критерием подобия для течения жидкостей в трубах, каналах и т. п. Характер течения различных жидкостей (или газов) в трубах разных сечений будет совершенно одинаков, если каждому течению соответствует одно и то же значение Re.

9.6. Течение жидкости в круглой трубе

При движении жидкости в круглой трубе скорость равна нулю у стенок трубы и максимальна на оси трубы. Полагая течение ламинарным, найдем закон изменения скорости с расстоянием r от оси трубы.

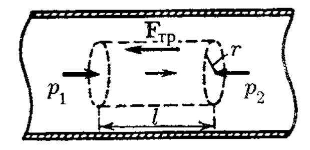


Рис. 9.13

Выделим воображаемый цилиндрический объем жидкости радиуса r и длины l (рис. 9.13). При стационарном течениии в трубе постоянного сечения скорости всех частиц жидкости остаются неизменными. Следовательно,

[13]) Взяв в качестве l диаметр трубы, нужно увеличить критическое значение Re в два раза.

сумма внешних сил, приложенных к любому объему жидкости, равна нулю. На основания рассматриваемого цилиндрического объема действуют силы давления, сумма которых равна $(p_1 - p_2)\pi r^2$. Эта сила действует в направлении движения жидкости. Кроме того, на боковую поверхность цилиндра действует сила трения, равная

$$\eta|dv/dr|2\pi rl$$

(имеется в виду значение dv/dr на расстоянии r от оси трубы). Условие стационарности имеет вид

$$(p_1 - p_2)\pi r^2 = \eta|dv/dr| \cdot 2\pi rl. \tag{9.17}$$

Скорость убывает с расстоянием от оси трубы. Следовательно, dv/dr отрицательна и $|dv/dr| = -dv/dr$. Учтя это, преобразуем соотношение (9.17) следующим образом:

$$-\frac{dv}{dr} = \frac{(p_1 - p_2)r}{2\eta l}.$$

Разделив переменные, получим уравнение

$$dv = -\frac{p_1 - p_2}{2\eta l} r\, dr.$$

Интегрирование дает

$$v = -\frac{p_1 - p_2}{4\eta l} r^2 + C. \tag{9.18}$$

Постоянную интегрирования нужно выбрать так, чтобы скорость обращалась в нуль на стенках трубы, т. е. при $r = R$ (R — радиус трубы). Из этого условия имеем

$$C = \frac{p_1 - p_2}{4\eta l} R^2.$$

Подстановка значения C в (9.18) приводит к формуле

$$v(r) = \frac{p_1 - p_2}{4\eta l}(R^2 - r^2) = \frac{p_1 - p_2}{4\eta l} R^2 \left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right). \tag{9.19}$$

Значение скорости на оси трубы равно

$$v_0 = v(0) = \frac{p_1 - p_2}{4\eta l} R^2. \tag{9.20}$$

С учетом этого формуле (9.19) можно придать вид

$$v(r) = v_0\left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right). \qquad (9.21)$$

Таким образом, при ламинарном течении скорость изменяется с расстоянием от оси трубы по параболическому закону (рис. 9.14).

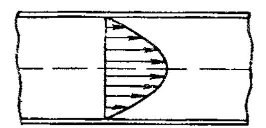


Рис. 9.14

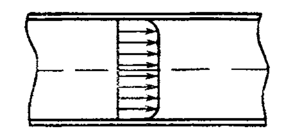


Рис. 9.15

При турбулентном течении скорость в каждой точке меняется беспорядочным образом. При неизменных внешних условиях постоянной оказывается средняя (по времени) скорость в каждой точке сечения трубы. Профиль средних скоростей при турбулентном течении изображен на рис. 9.15. Вблизи стенок трубы скорость изменяется гораздо сильнее, чем при ламинарном течении, в остальной же части сечения скорость изменяется меньше.

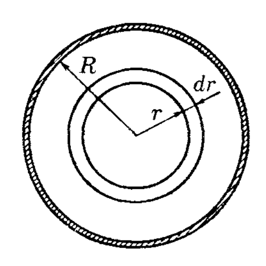


Рис. 9.16

Полагая течение ламинарным, вычислим поток жидкости Q, т. е. объем жидкости, протекающий через поперечное сечение трубы за единицу времени. Разобьем поперечное сечение трубы на кольца ширины dr (рис. 9.16). Через кольцо радиуса r пройдет за секунду объем жидкости, равный произведению площади кольца $2\pi r\,dr$ на скорость течения в точках, находящихся на расстоянии r от оси трубы. Приняв во внимание формулу (9.21), получим

$$dQ = v_0\left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right)\cdot 2\pi r\,dr. \qquad (9.22)$$

Чтобы получить поток Q, нужно проинтегрировать выражение (9.22) по r в пределах от нуля до R:

$$Q = \int_0^R v_0 \left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right) \cdot 2\pi r\, dr = \frac{1}{2}\pi R^2 v_0 = \frac{1}{2} S v_0 \quad (9.23)$$

(S — площадь сечения трубы). Из формулы (9.23) следует, что при ламинарном течении среднее (по сечению) значение скорости равно половине значения скорости на оси трубы.

Подставив в (9.23) значение (9.20) для v_0, получим для потока формулу

$$Q = \frac{(p_1 - p_2)\pi R^4}{8\eta l}. \quad (9.24)$$

Эта формула называется *формулой Пуазейля*[14]). Согласно (9.24) поток жидкости прямо пропорционален перепаду давления на единице длины трубы и четвертой степени радиуса трубы и обратно пропорционален коэффициенту вязкости жидкости. Напомним, что формула Пуазейля применима только при ламинарном течении.

Соотношение (9.24) используется для определения вязкости жидкостей. Пропуская жидкость через капилляр известного радиуса и измеряя перепад давления и поток Q, можно найти η.

9.7. Движение тел в жидкостях и газах

При движении тела в жидкости или газе[15]) на него действуют силы, равнодействующую которых мы обозначим буквой **R** (рис. 9.17). Силу **R** можно разложить на две составляющие, одна из которых, **Q**, направлена в сторону, противоположную движению тела (или в сторону движения потока, набегающего на тело), а вторая, **P**, перпендикулярна к этому направлению. Составляющие **Q** и **P** называются соответственно *лобовым сопротивлением*

[14]) Жан Луи Пуазейль (1799–1869) — французский врач и физик.

[15]) Заметим, что при постоянной скорости движения тела относительно жидкости сила, действующая на тело, будет в соответствии с принципом относительности Галилея такой же, как и в случае движения жидкости с той же скоростью относительно неподвижного тела (рис. 9.17 соответствует последнему случаю).

и **подъемной силой**. Очевидно, что на тело, симметричное относительно направления движения, может действовать только лобовое сопротивление, подъемная же сила в этом случае равна нулю.

Как показывают расчеты, в идеальной жидкости равномерное движение тел должно было бы происходить без лобового сопротивления. Не обладая вязкостью, идеальная жидкость должна свободно скользить по поверхности тела, полностью обтекая его. На рис. 9.18 показаны ли-

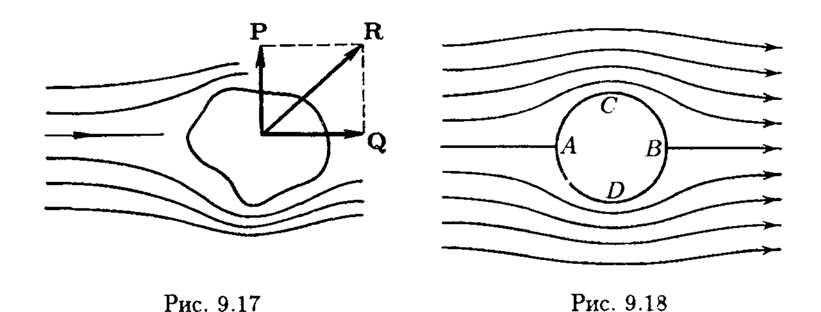


Рис. 9.17 Рис. 9.18

нии тока при обтекании очень длинного («бесконечного») цилиндра идеальной жидкостью. Вследствие полного обтекания картина линий тока оказывается совершенно симметричной как относительно прямой, проходящей через точки A и B, так и относительно прямой, проходящей через точки C и D. Поэтому давление вблизи точек A и B будет одинаково (и больше, чем в невозмущенном потоке, так как скорость вблизи этих точек меньше); точно так же давление вблизи точек C и D тоже будет одинаково (и меньше, чем в невозмущенном потоке, так как скорость вблизи этих точек больше). Следовательно, результирующая сил давления на поверхность цилиндра (которая при отсутствии вязкости могла бы обусловить лобовое сопротивление), очевидно, будет равна нулю. Такой же результат получается и для тел другой формы. Иначе протекают явления при движении тела в жидкости, обладающей вязкостью. В этом случае очень тонкий слой жидкости прилипает к поверхности тела и движется с ним как одно целое, увлекая за собой из-за трения последующие слои. По мере удаления от поверхности тела скорость слоев становится все меньше, и, наконец, на некотором расстоянии от поверхности жидкость оказывается практически не воз-

мущенной движением тела. Таким образом, тело оказывается окруженным слоем жидкости, в котором имеется градиент скорости. Этот слой называется **пограничным**. В нем действуют силы трения, которые в конечном итоге оказываются приложенными к телу и приводят к возникновению лобового сопротивления.

Но дело не исчерпывается только этим. Наличие пограничного слоя в корне изменяет характер обтекания тела жидкостью. Полное обтекание становится невозможным. Действие сил трения в поверхностном слое приводит к тому, что поток отрывается от поверхности тела, в результате чего позади тела возникают вихри (на рис. 9.19 показано обтекание цилиндра вязкой жидкостью). Вихри уносятся потоком и постепенно затухают вследствие тре-

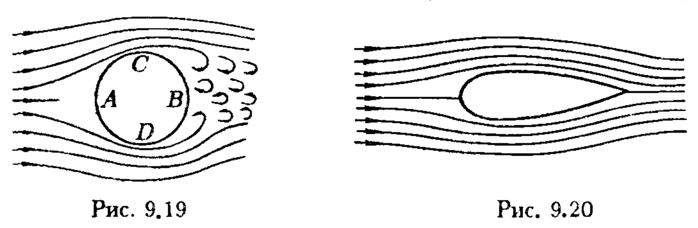


Рис. 9.19 Рис. 9.20

ния; при этом энергия вихрей расходуется на нагревание жидкости. Давление в образующейся за телом вихревой области оказывается пониженным, поэтому результирующая сил давления будет отлична от нуля, в свою очередь обусловливая лобовое сопротивление.

Таким образом, лобовое сопротивление складывается из сопротивления трения и сопротивления давления. При данных поперечных размерах тела сопротивление давления сильно зависит от формы тела. По этой причине его называют также сопротивлением формы. Наименьшим сопротивлением давления обладают тела хорошо обтекаемой каплевидной формы (рис. 9.20). Такую форму стремятся придать фюзеляжу и крыльям самолетов, кузову автомобилей и т. п.

Соотношение между сопротивлением трения и сопротивлением давления определяется значением числа Рейнольдса (9.14). В данном случае l — некоторый характерный размер тела (например, радиус для тела шаровой формы), v — скорость тела относительно жидкости.

При малых Re основную роль играет сопротивление трения, так что сопротивление давления можно не прини-

мать во внимание. При увеличении Re роль сопротивления давления все больше растет. При больших значениях Re в лобовом сопротивлении преобладают силы давления.

Определяя характер сил, действующих на тело в потоке, число Рейнольдса может служить критерием подобия явлений и в этом случае. Это обстоятельство используется при моделировании. Например, модель самолета будет вести себя в потоке газа так же, как и ее прообраз, если, кроме геометрического подобия модели и самолета, будет соблюдено также равенство для них чисел Рейнольдса.

Формула Стокса [16]). При малых Re, т. е. при небольших скоростях движения (и небольших l; см. (9.14)), сопротивление среды обусловлено практически только силами трения. Стокс установил, что сила сопротивления в этом случае пропорциональна коэффициенту динамической вязкости η, скорости v движения тела относительно жидкости и характерному размеру тела l: $F \sim \eta l v$ (предполагается, что расстояние от тела до границ жидкости, например до стенок сосуда, значительно больше размеров тела). Коэффициент пропорциональности зависит от формы тела. Для шара, если в качестве l взять радиус шара r, коэффициент пропорциональности оказывается равным 6π. Следовательно, сила сопротивления движению шарика в жидкостях при небольших скоростях в соответствии с формулой Стокса равна

$$F = 6\pi\eta r v. \qquad (9.25)$$

Подъемная сила. Для возникновения подъемной силы вязкость жидкости не имеет существенного значения. На рис. 9.21 показаны линии тока при обтекании идеальной жидкостью полуцилиндра. Вследствие полного обтекания линии тока будут симметричны относительно прямой CD. Однако относительно прямой AB картина будет несимметричной. Линии тока сгущаются вблизи точки C, поэтому давление здесь будет меньше, чем вблизи точки D, и возникает подъемная сила $\mathbf{P}$. Аналогичным образом возникает подъемная сила и в вязкой жидкости.

Силой, поддерживающей самолет в воздухе, служит подъемная сила, действующая на его крылья. Лобовое сопротивление играет при полете самолета вредную роль.

[16]) Джордж Габриель Стокс (1819–1903) — английский физик и математик.

Поэтому крыльям самолета и его фюзеляжу придают хорошо обтекаемую форму. Профиль крыла должен вместе с тем обеспечивать достаточную подъемную силу. Оптимальным для крыла является показанный на рис. 9.22 профиль, найденный Жуковским [17]). Трудами Жуковского было положено начало современной аэродинамике. Жуковский, в частности, вывел формулу для определения подъемной силы, являющуюся основой всех аэродинамических расчетов самолетов.

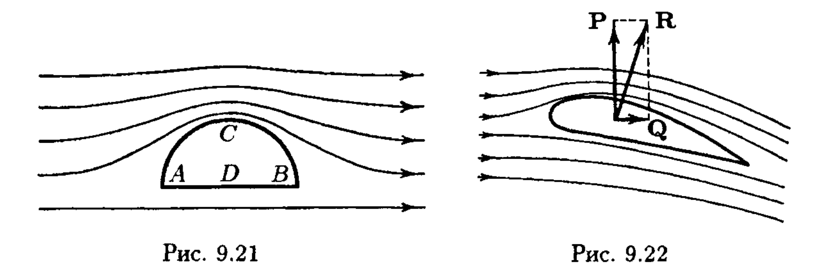


Рис. 9.21 Рис. 9.22

[17]) Николай Егорович Жуковский (1847–1921) — русский ученый.

Приложение

Симметричные тензоры второго ранга

Формулы преобразования компонент вектора. Возьмем две системы координат K и K', ориентированные относительно друг друга произвольным образом. Базис системы K образуют орты $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$, системы K' — орты $\mathbf{e}'_1$, $\mathbf{e}'_2$, $\mathbf{e}'_3$ (мы будем обозначать декартовы координаты через x_1, x_2, x_3 вместо x, y, z). В системе K некоторый вектор $\mathbf{a}$ можно представить в виде $\sum a_k \mathbf{e}_k$, в системе K' — в виде $\sum a'_k \mathbf{e}'_k$ (a_k и a'_k — компоненты вектора $\mathbf{a}$ в соответствующих системах, индекс k пробегает в обеих суммах значения 1, 2, 3). Очевидно, что

$$\sum_{k=1}^{3} a'_k \mathbf{e}'_k = \sum_{k=1}^{3} a_k \mathbf{e}_k. \tag{П.1}$$

Умножим все члены равенства (П.1) на орт $\mathbf{e}'_i$: $\sum\limits_{k=1}^{3} a'_k(\mathbf{e}'_i\mathbf{e}'_k) = \sum\limits_{k=1}^{3} a_k(\mathbf{e}'_i\mathbf{e}_k)$. В соответствии с формулой (1.19) $\mathbf{e}'_i\mathbf{e}'_k = \delta_{ik}$. Следовательно, $\sum\limits_k a'_k(\mathbf{e}'_i\mathbf{e}'_k) = \sum\limits_k a'_k\,\delta_{ik} = a'_i$. Выражение $\mathbf{e}'_i\mathbf{e}_k$ представляет собой косинус угла между i-й осью системы K' и k-й осью системы K, т. е. $\cos(x'_i, x_k)$. Введем обозначение

$$\alpha_{ik} = \cos(x'_i, x_k). \tag{П.2}$$

Тогда равенство (П.1) примет вид

$$a'_i = \sum_{k=1}^{3} \alpha_{ik}\, a_k \quad (i = 1, 2, 3). \tag{П.3}$$

Зная компонеты вектора $\mathbf{a}$ в системе K и взаимную ориентацию систем K и K' (т. е. совокупность девяти коэффициентов α_{ik}), можно по формулам (П.3) вычислить компоненты вектора $\mathbf{a}$ в системе K'.

Согласно строгому определению *вектором называется совокупность трех величин* (a_1, a_2, a_3), *которые при переходе от одной системы координат к другой преобразуются по формулам* (П.3), *где коэффициенты* α_{ik} *имеют значения* (П.2) (см. подстрочное примечание на с. 171) Отметим, что из девяти коэффициентов α_{ik} независимыми являются только три. Это согласуется с тем, что ориентация тела в пространстве определяется тремя углами.

Определение тензора второго ранга. *Тензором* $\mathbf{T}$ *второго ранга называется совокупность девяти величин*

$$\begin{pmatrix} T_{11} & T_{12} & T_{13} \\ T_{21} & T_{22} & T_{23} \\ T_{31} & T_{32} & T_{33} \end{pmatrix}, \tag{П.4}$$

которые при переходе от одной системы координат к другой преобразуются по формулам

$$T'_{ik} = \sum_{l\,m} \alpha_{il}\alpha_{km} T_{lm} \quad (i, k = 1, 2, 3), \tag{П.5}$$

где коэффициенты α_{il} *и* α_{km} *имеют значения* (П.2) (см. подстрочное примечание на с 18) Величины T_{ik} в (П 4) называются компонентами тензора.

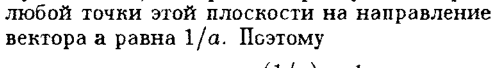
Аналогично определяются и тензоры других рангов. Тензором n-го ранга называется совокупность 3^n величин $T_{ik\ldots s}$ (всего n индексов), которые при переходе от одной системы координат к другой преобразуются по формулам, отличающимся от (П.5) лишь тем, что в них содержатся n множителей вида α_{ik} и суммирование производится по n индексам. В соответствии с таким определением вектор представляет собой тензор первого ранга, а скаляр — тензор нулевого ранга.

Произведением вектора **a** на тензор второго ранга **T** называется вектор **b** с компонентами (ср. с (5.30))

$$b_i = \sum_{k=1}^{3} T_{ik} a_k \quad (i = 1, 2, 3). \tag{П.6}$$

Симметричный тензор второго ранга. Тензор называется симметричным, если его компоненты удовлетворяют условию $T_{ik} = T_{ki}$. В дальнейшем симметричный тензор мы будем обозначать символом **S**, а его компоненты — символом S_{ik}. Независимыми у симметричного тензора являются только шесть компонент: три диагональные — вида S_{ii} и, например, компоненты S_{12}, S_{23}, S_{31} ($S_{21} = S_{12}$, $S_{32} = S_{23}$, $S_{13} = S_{31}$).

Симметричный тензор второго ранга допускает важную геометрическую интерпретацию. Прежде чем перейти к ней, отметим, что вектору **a** можно сопоставить не только направленный отрезок, но и построенную по определенным правилам плоскость. Совместим начало отрезка, изображающего вектор, с началом координат O (рис. П.1). Тогда перпендикулярная к вектору плоскость, отстоящая от точки O на расстояние, равное $1/a$, полностью определяет как направление, так и модуль вектора **a**. Из рисунка видно, что проекция радиуса-вектора **r**


любой точки этой плоскости на направление вектора **a** равна $1/a$. Поэтому

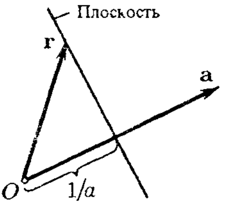


Рис. П.1

$$\mathbf{ar} = ar_a = a(1/a) = 1.$$

Таким образом, уравнение плоскости имеет вид $\mathbf{ar} = 1$, или в развернутом виде:

$$a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 = 1. \tag{П.7}$$

Отметим, что положение плоскости (П.7) в пространстве не зависит от выбора системы координат. При переходе к другой системе изменяются как компоненты вектора a_k, так и координаты x_k данной точки плоскости, причем таким образом, что соотношение (П.7) остается в силе.

Симметричному тензору второго ранга можно сопоставить поверхность второго порядка, определяемую уравнением

$$S_{11}x_1^2 + S_{22}x_2^2 + S_{33}x_3^2 + 2S_{12}x_1x_2 + 2S_{23}x_2x_3 + 2S_{31}x_3x_1 = 1. \quad (\text{П}.8)$$

Компоненты S_{11}, S_{22}, S_{33} в физических приложениях бывают больше нуля. При этом условии уравнение (П.8) определяет эллипсоид. Ориентация эллипсоида в пространстве не зависит от выбора системы координат. Тензорный эллипсоид связан с объектом (телом либо средой), свойства которого описывает тензор. При переходе к другой системе координат изменяются как компоненты тензора, так и координаты данной точки эллипсоида, причем таким образом, что соотношение (П.8) остается в силе.

Эллипсоид, определяемый уравнением (П.8), является геометрическим образом симметричного тензора второго ранга, подобно тому как направленный отрезок или плоскость (П.7) (т. е. поверхность первого порядка) дает геометрический образ вектора (т. е. тензора первого ранга).

Из аналитической геометрии известно, что если оси координат направить вдоль полуосей эллипсоида a, b, c, то уравнение эллипсоида упрощается и принимает вид

$$\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{x_2^2}{b^2} + \frac{x_3^2}{c^2} = 1. \quad (\text{П}.9)$$

Отсюда следует, что для каждого симметричного тензора второго ранга имеются такие направления координатных осей, при которых равные компонентам тензора коэффициенты S_{12}, S_{23} и S_{31} в уравнении (П.8) обращаются в нуль. Эти направления называются **главными осями** тензора. Если оси координат направить вдоль главных осей, тензор принимает диагональный вид:

$$S = \begin{pmatrix} S_1 & 0 & 0 \\ 0 & S_2 & 0 \\ 0 & 0 & S_3 \end{pmatrix}. \quad (\text{П}.10)$$

Тензор вида (П.10) называется **приведенным к главным осям**, а диагональные компоненты в этом случае называются **главными значениями** тензора. Мы написали при диагональных компонентах в (П.10) только один индекс, чтобы отличить их от диагональных компонент S_{11}, S_{22}, S_{33}, определенных в координатных осях, не совпадающих с главными осями тензора.

Уравнение тензорного эллипсоида, написанное в главных осях, имеет вид

$$S_1x_1^2 + S_2x_2^2 + S_3x_3^2 = 1. \quad (\text{П}.11)$$

Из сравнения уравнений (П.9) и (П.11) получаются для полуосей тензорного эллипсоида значения

$$a = 1/\sqrt{S_1}, \quad b = 1/\sqrt{S_2}, \quad c = 1/\sqrt{S_3}. \quad (\text{П}.12)$$

Найдем смысл расстояния ρ произвольной точки эллипсоида P от центра O (рис. П.2). Для этого направим вдоль OP ось x_1' некоторой

координатной системы K'. Координаты точки P в этой системе равны $(\rho,\ 0,\ 0)$ Подстановка этих значений в уравнение (П.8) приводит к соотношению $S'_{11}\rho^2 = 1$, откуда

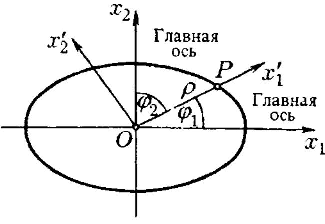


Рис. П.2

$$\rho = 1/\sqrt{S'_{11}}, \tag{П.13}$$

где S'_{11} — первая диагональная компонента тензора в системе K'. Обозначим углы, образуемые осью x'_1 с главными осями тензора, через φ_1, φ_2, φ_3 (см. рис. П.2). Тогда координаты точки P в главных осях будут равны $x_1 = \rho\cos\varphi_1$, $x_2 = \rho\cos\varphi_2$, $x_3 = \rho\cos\varphi_3$. Подстановка этих значений в (П.11) дает $\rho^2(S_1\cos^2\varphi_1 + S_2\cos^2\varphi_2 + S_3\cos^2\varphi_3) = 1$. Согласно (П.13) $1/\rho^2 = S'_{11}$. Таким образом, мы приходим к соотношению

$$S'_{11} = S_1\cos^2\varphi_1 + S_2\cos^2\varphi_2 + S_3\cos^2\varphi_3, \tag{П.14}$$

которое связывает компоненту S'_{11} в системе K' с главными значениями тензора и углами, образуемыми осью x'_1 с главными осями тензора.

В случае, когда два главных значения тензора совпадают (например, $S_1 = S_2 \neq S_3$), тензорный эллипсоид превращается в эллипсоид вращения. В этом случае фиксирована относительно тела или среды только одна главная ось тензора — ось симметрии эллипсоида (в нашем примере ось x_3). В качестве двух других главных осей можно взять две любые взаимно перпендикулярные оси, проходящие через центр эллипсоида и перпендикулярные к его оси симметрии.

В случае, когда все три главных значения тензора совпадают ($S_1 = S_2 = S_3 = S$), тензорный эллипсоид вырождается в сферу радиуса $1/\sqrt{S}$ (см (П.12)). В этом случае три любые взаимно перпендикулярные оси, проходящие через центр сферы, можно взять в качестве главных осей тензора.

Симметричный тензор с компонентами δ_{ik}, т. е. тензор

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \tag{П.15}$$

называется *единичным*. Произведя вычисления по формулам (П.6), легко убедиться в том, что умножение вектора **a** на единичный тензор (П.15) оставляет вектор **a** без изменений. Тензорный эллипсоид для единичного тензора вырождается в сферу единичного радиуса. Можно доказать, что тензор (П.15) является инвариантным. Это означает, что его компоненты не изменяются при переходе от одной системы координат к другой. Тензор с одинаковыми главными значениями $S_1 = S_2 = S_3 = S$ можно представить в виде произведения скаляра S на единичный тензор:

$$\begin{pmatrix} S & 0 & 0 \\ 0 & S & 0 \\ 0 & 0 & S \end{pmatrix} = S\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{П.16}$$

Оба множителя — скаляр и единичный тензор — являются инвариантными. Следовательно, и тензор, стоящий слева в равенстве (П.16), также является инвариантным.

Эллипсоид инерции. Поясним полученные соотношения на примере тензора инерции (см. §5.5). Эллипсоид инерции (т. е. эллипсоид тензора инерции) жестко связан с телом, инертные свойства которого он описывает. Главные оси инерции тела совпадают с полуосями эллипсоида, т. е. являются главными осями тензора инерции. Главные моменты инерции тела I_1, I_2, I_3 являются главными значениями тензора инерции. В соответствии с (П.12) полуоси эллипсоида инерции равны $1/\sqrt{I_1}$, $1/\sqrt{I_2}$ и $1/\sqrt{I_3}$.

Проведем через центр масс тела произвольную ось x'_1, образующую с главными осями инерции (т. е. с полуосями эллипсоида инерции) углы φ_1, φ_2 и φ_3. Согласно формуле (П.14) момент инерции тела относительно этой оси (осевой момент инерции I'_{11}, соответствующий I_{xx} в формуле (5.32)) можно вычислить по формуле

$$I'_{11} = I_1 \cos^2 \varphi_1 + I_2 \cos^2 \varphi_2 + I_3 \cos^2 \varphi_3. \qquad (\text{П}.17)$$

где I_1, I_2, I_3 — главные моменты инерции тела.

Шаровой волчок определяется как тело, все три главных момента инерции которого одинаковы:

$$I_1 = I_2 = I_3 = I$$

(см. с. 162). Следовательно, эллипсоид инерции шарового волчка вырождается в сферу радиуса $1/\sqrt{I}$. Однородный куб является частным случаем шарового волчка. Для момента инерции относительно произвольной оси, образующей с ребрами куба углы φ_1, φ_2 и φ_3, получается по формуле (П.17) значение

$$I'_{11} = I \cos^2 \varphi_1 + I \cos^2 \varphi_2 + I \cos^2 \varphi_3 = I.$$

Напомним, что для любого направления в пространстве

$$\cos^2 \varphi_1 + \cos^2 \varphi_2 + \cos^2 \varphi_3 = 1.$$

Таким образом, момент инерции куба относительно любой оси, проходящей через его центр, будет один и тот же (как и у однородного шара). Поэтому поведение куба при вращении вокруг оси, проходящей через его центр, не отличается от поведения шара. Точно так же не отличается от поведения шара поведение любого шарового волчка, т. е. тела произвольной формы, но с таким распределением массы, что три главных момента инерции оказываются совпадающими.

Аналогично не будет отличаться от поведения при вращении однородного круглого цилиндра поведение однородной прямой призмы с квадратным основанием, равно как и поведение любого симметричного волчка, т. е. тела произвольной формы, но с таким распределением массы, что два из трех главных моментов инерции оказываются совпадающими.

Предметный указатель